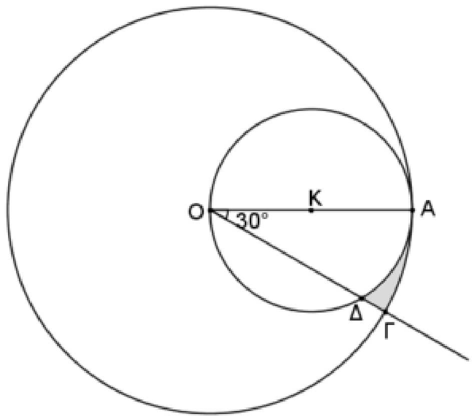
Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

<u>Θέμα 4</u> **GI_V_GEO_4_22333**

Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (Ο, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την ακτίνα ΟΑ γωνία 30° και τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ.



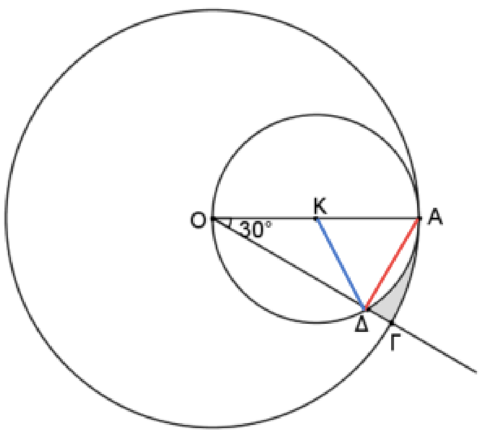
α) Να αποδείξετε ότι τα τόξα ΑΓ και ΑΔ έχουν ίσα μήκη.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου (Ο, R) την περίμετρο του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου ΑΔΓ

(Μονάδες 15)

<u>Λύση:</u>



α) Ο μικρός κύκλος έχει ακτίνα $OK = \frac{R}{2}$.

Το μήκος $\ell_{A\Gamma}$ του τόξου ΑΓ είναι

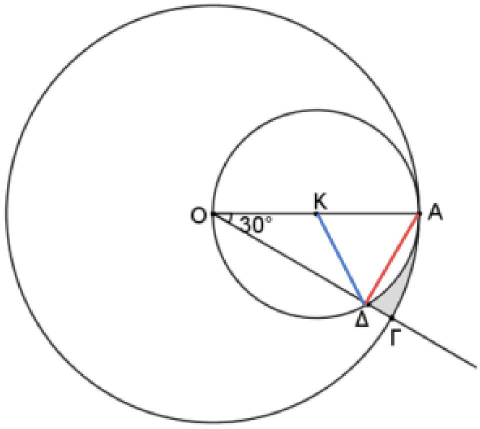
$$\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi R \cdot \cancel{30^o}}{\underset{6}{\cancel{180^o}}} = \frac{\pi R}{6} \quad \textbf{(1)}$$

Φέρνουμε την $K\Delta$. Η γωνία $A\hat{K}\Delta$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της εγγεγραμμένης $A\hat{O}\Delta = 30^0$ στον κύκλο με κέντρο το Κ, άρα

$A\hat{K}\Delta = 60^0$. Το μήκος $\ell_{A\Delta}$ του τόξου ΑΔ είναι : $\ell_{A\Delta} = \dfrac{\pi \frac{R}{\cancel{2}} \cdot \cancel{60}^{30^0}}{\cancel{180^0}_{6}} = \dfrac{\pi R}{6}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχουμε $\ell_{A\Gamma} = \ell_{A\Delta} = \dfrac{\pi R}{6}$

β) Το τρίγωνο ΟΔΑ είναι ορθογώνιο, αφού η $A\hat{\Delta}O$ εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο διαμέτρου ΟΑ. Επειδή $\hat{O} = 30^0$ θα είναι $A\Delta = \dfrac{OA}{2}$



οπότε $A\Delta = \dfrac{R}{2}$

και $\hat{O} = 30^0 \Rightarrow A\Delta = \dfrac{OA}{2} \Rightarrow A\Delta = \dfrac{R}{2}$

Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΑ

έχουμε: $AO^2 = O\Delta^2 + A\Delta^2$ οπότε

$$R^2 = O\Delta^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow O\Delta^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow O\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Τότε $\Delta\Gamma = O\Gamma - O\Delta = R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2R - R\sqrt{3}}{2}$.

Άρα η περίμετρος Ρ του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΔ είναι

$$P = \frac{\pi R}{6} + \frac{\pi R}{6} + \frac{2R - R\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi R + 2R - R\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{6}\left(2\pi + 2 - \sqrt{3}\right)$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός