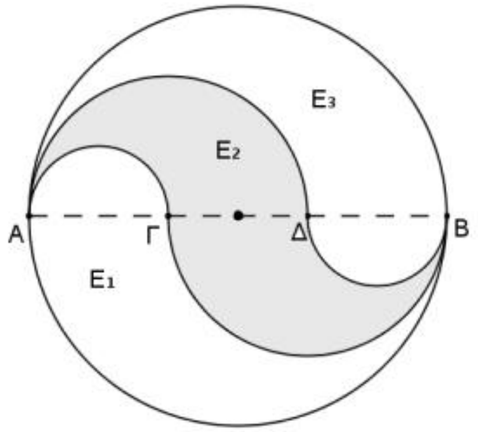
Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22330**

Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ που διαιρούν τη διάμετρό του ΑΒ=δ σε τρία ίσα τμήματα. Στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της ΑΒ γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις ΑΓ και ΑΔ και στο αντικείμενο ημιεπίπεδο γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους ΒΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε:



α) Το εμβαδόν Ε του κυκλικού δίσκου διαμέτρου ΑΒ=δ ισούται με $E=\frac{\pi\delta^2}{4}$.

(Μονάδες 5)

β) Το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΓΒΔΑ (το γραμμοσκιασμένο) ισούται με το μήκους του κύκλου (Ο,R).

(Μονάδες 10)

γ) Οι καμπύλες γραμμές ΑΓΒ και ΑΔΒ διαιρούν τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου ΑΒ=δ σε τρία ισεμβαδικά χωρία τα E_1, E_2, E_3.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi\cdot R^2=\pi\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot\delta^2}{4}$

β) Θεωρούμε L το μήκος των τόξων. Τότε επειδή τα τόξα αντιστοιχούν σε ημικύκλια

L = $\frac{2\cdot\pi\cdot\rho}{2}=\pi\cdot\rho=\pi\cdot\frac{\delta}{2}$ όπου ρ είναι η αντίστοιχη ακτίνα και δ η αντίστοιχη διάμετρος

Έτσι έχουμε ότι:

$$L_{ολ}=L_{ΑΓ}+L_{ΒΓ}+L_{ΒΔ}+L_{ΑΔ}=\frac{\pi\cdot ΑΓ}{2}+\frac{\pi\cdot ΒΓ}{2}+\frac{\pi\cdot ΒΔ}{2}+\frac{\pi\cdot ΑΔ}{2}=$$

$$\frac{\pi\cdot(ΑΓ+ΒΓ+ΒΔ+ΑΔ)}{2}=\frac{\pi\cdot(\delta+\delta)}{2}=\pi\cdot\delta=2\pi R$$

γ) Υπολογίζουμε ξεχωριστά το εμβαδόν κάθε χωρίου

$$E_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{6}\right)^2=\frac{\pi\delta^2}{8}-\frac{\pi\delta^2}{18}+\frac{\pi\delta^2}{72}=\frac{9\pi\delta^2-4\pi\delta^2+\pi\delta^2}{72}=$$

$$=\frac{6\pi\delta^2}{72}=\frac{\pi\delta^2}{12}$$

$$E_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{6}\right)^2=\frac{\pi\delta^2}{18}-\frac{\pi\delta^2}{72}+\frac{\pi\delta^2}{18}-\frac{\pi\delta^2}{72}=$$

$$=\frac{\pi\delta^2}{9}-\frac{\pi\delta^2}{36}=-\frac{\pi\delta^2}{12}=\frac{6\pi\delta^2}{72}=\frac{\pi\delta^2}{12}$$

$$E_3=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta}{6}\right)^2=\frac{\pi\delta^2}{8}-\frac{\pi\delta^2}{18}+\frac{\pi\delta^2}{72}=\frac{9\pi\delta^2-4\pi\delta^2+\pi\delta^2}{72}=$$

$$=\frac{6\pi\delta^2}{72}=\frac{\pi\delta^2}{12}$$

Οπότε $E_1=E_2=E_3$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός