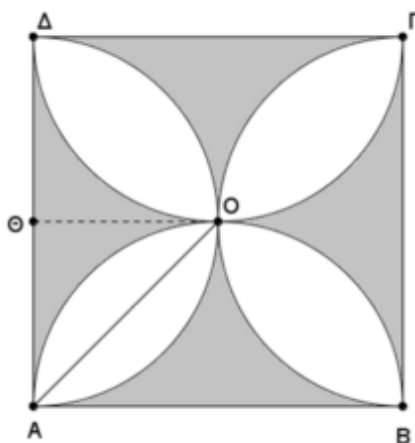


Τράπεζα Θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4

GI_V_GEO_4_22325

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 10, κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του και έχουν κοινό σημείο το κέντρο Ο του τετραγώνου.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$, όπου Θ το μέσο της πλευράς ΑΔ.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$ είναι $\frac{25}{4}(\pi - 2)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου, είναι $50(4 - \pi)$.

(Μονάδες 10)

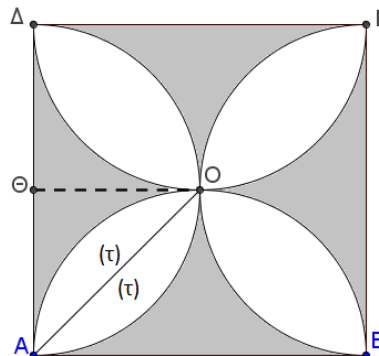
Λύση:

α) Το Θ είναι κέντρο του κύκλου διαμέτρου ΑΔ οπότε

$$ΟΘ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{10}{2} \quad \text{άρα } ΟΘ = 5$$

Το εμβαδόν E_1 του κυκλικού τομέα $(\Theta, ΟΑ)$ είναι

$$E_1 = \frac{\pi \cdot ΟΘ^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = \frac{25\pi}{4}$$



β) Έστω τ το εμβαδόν που ζητάμε και $(\Theta ΟΑ)$ το εμβαδόν ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου $\Theta ΟΑ$. Τότε:

$$\tau = E_1 - (\Theta ΟΑ) \quad \text{άρα}$$

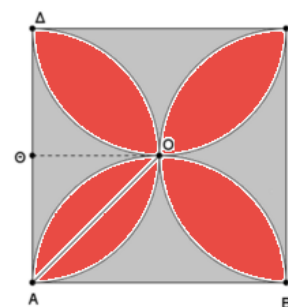
$$\tau = \frac{25\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \Theta Α \cdot ΟΘ = \frac{25\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{4} \quad \text{οπότε } \tau = \frac{25}{4}(\pi - 2)$$

γ) Το εμβαδόν κάθε «φύλλου» είναι

$$2\tau = 2 \cdot \frac{25}{4}(\pi - 2) = \frac{25}{2}(\pi - 2)$$

Το συνολικό εμβαδόν E_Σ του τετράφυλλου είναι:

$$E_\Sigma = 4(2\tau) = 4 \cdot \frac{25}{2}(\pi - 2) = 50(\pi - 2)$$



Το εμβαδόν E_ζ του γραμμοσκιασμένου μέρους είναι:

$$E_\zeta = (ΑΒΓΔ) - E_\Sigma = 10^2 - 50(\pi - 2) = 100 - 50\pi + 100 = 200 - 50\pi$$

$$\text{άρα } E_\zeta = 50(4 - \pi)$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσσης – ΜEd – Μαθηματικός