Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22321**

Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,8), (Κ,2) με διάκεντρο ΟΚ = 12 η οποία τους τέμνει στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν ΑΒ είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δυο κύκλων και ΚΜ κάθετο τμήμα στην ΟΑ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $MK = 6\sqrt{3}$

(Μονάδες 6)

β) $(AOKB) = 30\sqrt{3}$

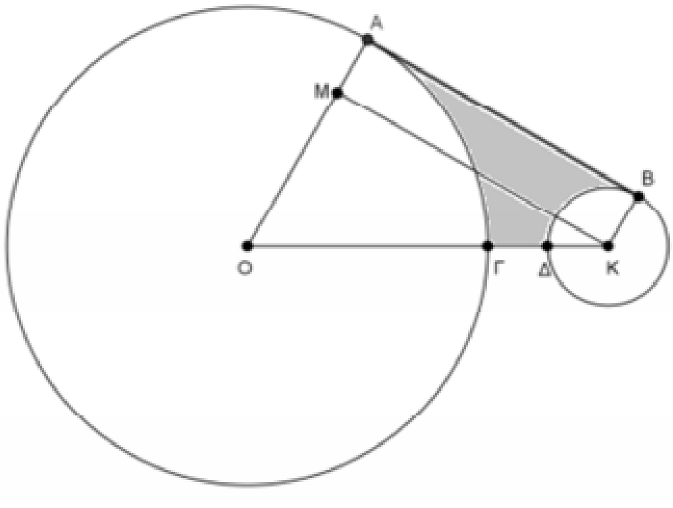
(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΜΟΚ

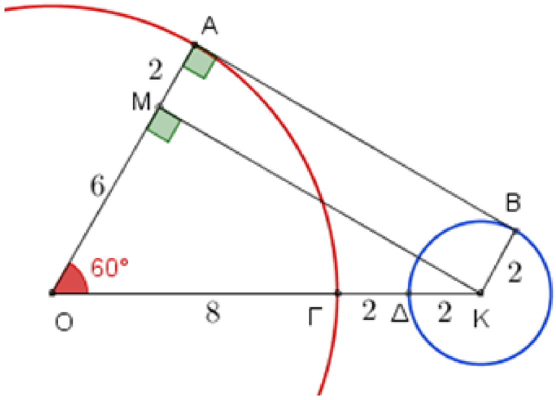
(Μονάδες 7)

δ) $(ΟΑΓ) = 16(ΔΒΚ)$

(Μονάδες 7)



Λύση:



α) Από τα αρχικά δεδομένα προκύπτουν κάποια επιμέρους άμεσα συμπεράσματα που αποτυπώνονται στο διπλανό σχήμα.

Το τρίγωνο ΟΜΚ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΟΚ = 12 και κάθετη πλευρά ΟΜ = 6. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$\mathrm{MK}^2 = 12^2 - 6^2 = 108$ οπότε $\mathrm{MK} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΚΜ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = ΜΚ = $6\sqrt{3}$

Το τετράπλευρο ΑΟΚΒ είναι τραπέζιο (ΟΑ // ΚΒ) με εμβαδόν

$$(\mathrm{AOKB}) = \frac{\mathrm{AO}+\mathrm{KB}}{2}\mathrm{AB} = \frac{10}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΚ είναι $\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OK}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{MKO} = 30^0 \Leftrightarrow \mathrm{MOK} = 60^0$

(ιδιότητες ορθογωνίων τριγώνων)

δ) $\mathrm{OA}//\mathrm{KB} \Leftrightarrow \mathrm{BK\Delta} = 120^0$ (ως παραπληρωματική της γωνίας MOK)

Το (ΟΑΓ) εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$(\mathrm{OA\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{O\Gamma}\,\eta\mu 60^0 = 32\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Το (ΔΒΚ) εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΚ είναι: $(\Delta\mathrm{BK}) = \frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Delta\,\eta\mu 120^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Άρα $(OA\Gamma) = 16(\Delta BK)$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός