Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22319**

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε ΒΜ=2R. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Φέρουμε εφαπτόμενη στο ημικύκλιο στο σημείο Α η οποία τέμνει την προέκταση του τμήματος ΜΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{M\Gamma} = 2\sqrt{2}\cdot R$

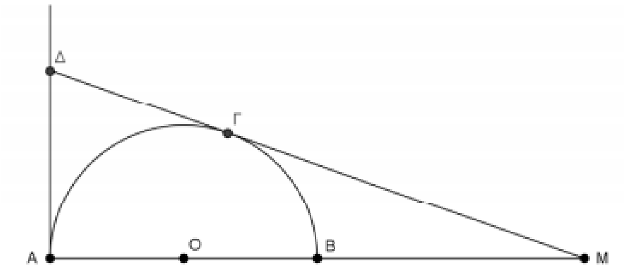
(Μονάδες 8)

β) $\mathrm{MO}\cdot\mathrm{MA} = \mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta}$

(Μονάδες 8)

γ) (ΑΟΓΔ) = (ΜΟΓ)

(Μονάδες 9)



Λύση:

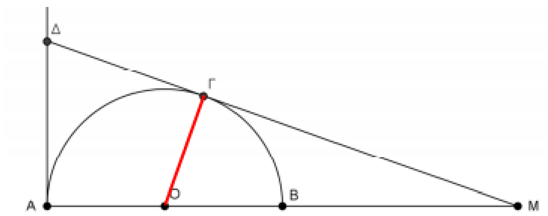
α) Κατ' αρχάς ΜΑ = $2R + 2R = 4R$

Από τη δύναμη του σημείου Μ ως προς τον κύκλο (O, R) έχουμε :

$\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{MB}\cdot\mathrm{MA} = 2R\cdot 4R = 4R^2\cdot 2$ και άρα $\mathrm{M\Gamma} = 2R\sqrt{2}$.

β) Στο τετράπλευρο ΑΟΓΔ έχουμε

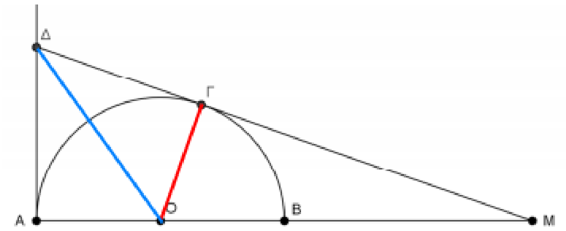
$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = 90^0$, και $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O} = 90^0$ αφού τα εφαπτόμενα τμήματα ΔΑ και ΓΔ είναι κάθετα στις ακτίνες ΟΑ και ΟΓ



αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο (οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές).

Οπότε $\mathrm{MO}\cdot\mathrm{MA}=\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta}$ **(1).**

γ) Επειδή η γωνία $\mathrm{O}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=90^\circ$ είναι κοινή για τα εμβαδά (ΟΜΔ) και (ΟΜΓ) των τριγώνων ισχύει



$$\frac{(\mathrm{OM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=\frac{\mathrm{M\Delta}\cdot\mathrm{OM}}{\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{M\Gamma}}$$

Από την **(1)** έχουμε $\mathrm{M\Delta}=\dfrac{\mathrm{MO}\cdot\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$

Άρα $$\frac{(\mathrm{OM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{M\Gamma}}=\frac{\dfrac{\mathrm{MO}\cdot\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}}{\mathrm{M\Gamma}}=\frac{\mathrm{MO}\cdot\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}^2}=\frac{3R\cdot4R}{8R^2}=\frac{3}{2}$$

Όμως $$\frac{(\mathrm{OM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=\frac{(\mathrm{OM\Gamma})+(\mathrm{O\Gamma\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=\frac{(\mathrm{OM\Gamma})}{(\mathrm{OM\Gamma})}+\frac{(\mathrm{O\Gamma\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=1+\frac{(\mathrm{O\Gamma\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}$$

Άρα $$\frac{(\mathrm{O\Gamma\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}=\frac{(\mathrm{OM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΓΟΔ έχουν ίσες πλευρές (ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες , ΔΑ = ΔΒ εφαπτόμενα τμήματα από το Δ και ΟΔ κοινή) άρα είναι ίσα και ισεμβαδικά

Οπότε για το εμβαδόν (ΑΟΓΔ) του ΑΟΓΔ θα έχουμε

(ΑΟΓΔ) = (ΑΟΔ) + (ΟΓΔ) = 2·(ΟΓΔ) = (ΟΜΓ)

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός