Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22315**

Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και ημιευθεία Ax τέτοια, ώστε η γωνία BAx να είναι 30°. Η Ax τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β, η οποία τέμνει την Ax στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ=R

(Μονάδες 5)

β) $\frac{(P B \Gamma)}{(P A B)}=\frac{1}{4}$

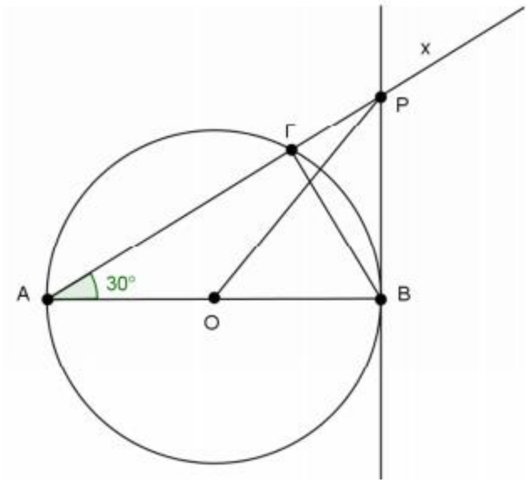
(Μονάδες 8)

γ) $PB=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

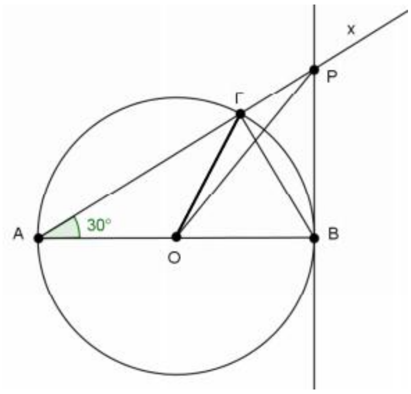
(Μονάδες 6)

δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΒΟΓ είναι: $E=\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$

(Μονάδες 6)



Λύση:



α) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές, οπότε

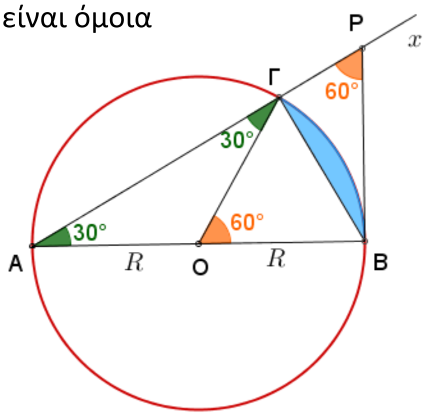
$\mathrm{A\hat{\Gamma}O} = 30^0$ και $\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = 120^0$

Άρα $B\hat{O}\Gamma = 60^0$ και το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο (ισοσκελές με γωνία 60^o)

Οπότε ΒΓ = R .

β) Το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο

($\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 90^0$ βαίνει σε ημικύκλιο). Τα τρίγωνα ΒΡΓ και ΡΑΒ είναι όμοια (ορθογώνια και η γωνία Ρ είναι κοινή, $\hat{\mathrm{P}} = 60^0$) με λόγο



ομοιότητας $\lambda = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

Άρα για τα εμβαδά (ΡΒΓ) και (ΡΑΒ) ισχύει $\frac{(\mathrm{PB\Gamma})}{(\mathrm{PAB})} = \frac{1}{4}$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΒ, είναι $B\hat{A}P = 30^0$, οπότε

$PA = 2BP$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $AB^2 = PB^2 + AB^2$

Οπότε $4PB^2 = PB^2 + AB^2 \Leftrightarrow 3PB^2 = 4R^2 \Leftrightarrow PB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

δ) Έστω E_1 το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\left(O, \mathrm{B\Gamma}\right)$ και (ΟΒΓ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ τότε για το ζητούμενο εμβαδό Ε ισχύουν:

$$E = E_1 - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός