Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22307**

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ , όπου Μ το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 5)

β) $(\text{ΑΜΔ}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

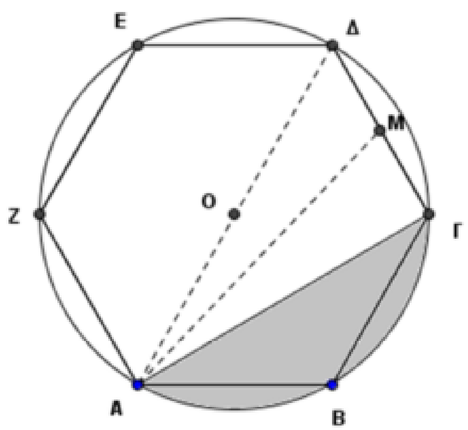
(Μονάδες 7)

γ) $(\text{ΑΜΔΕΖ}) = 2(\text{ΑΒΓΜ})$

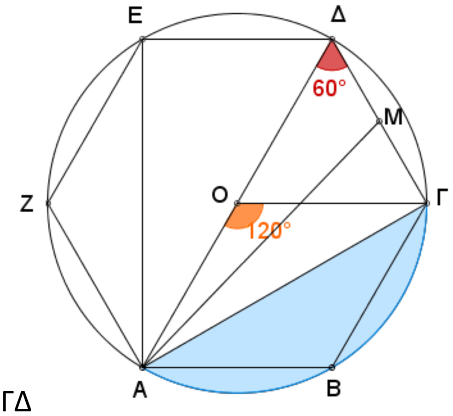
(Μονάδες 5)

δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με: $\frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

(Μονάδες 8)



Λύση:



α) Το κανονικό ΑΒΓΔΕΖ εξάγωνο έχει εμβαδόν (ΑΒΓΔΕΖ) εξαπλάσιο από το εμβαδόν (ΟΓΔ) του ισοπλεύρου τριγώνου ΟΓΔ Άρα

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ}) = 6(O\Gamma\Delta) = 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

β) Για το εμβαδόν (ΑΜΔ) του τριγώνου ΑΜΔ έχουμε

$(AM\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)$ γιατί η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΓΔ

Άρα $(\mathrm{AM\Delta}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}\,\eta\mu 60^0}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι ίσα (έχουν ίσες πλευρές) άρα και ισεμβαδικά, καθώς επίσης και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΔ. Επίσης τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΓΜ έχουν ίσα εμβαδά γιατί η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΓΔ. Ακόμη στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΓΟ είναι διάμεσος άρα (ΑΓΔ) = 2(ΟΓΔ) = $\frac{2}{6}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})$ άρα

$(\mathrm{A\Gamma\Delta}) = (\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})$ και $(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{AZE}) = \frac{1}{6}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})$ Τότε

$$(\mathrm{AM\Delta EZ}) = (\mathrm{AM\Delta}) + (\mathrm{A\Delta E}) + (\mathrm{AEZ}) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ}) = \frac{2}{3}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})$$

και $(\mathrm{AB\Gamma M}) = \frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})$ άρα $(\mathrm{AM\Delta EZ}) = 2(\mathrm{AB\Gamma M})$

δ) Αν E_ζ είναι το ζητούμενο εμβαδόν (ΟΑΓ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ και E_1 το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\left(O, A\Gamma\right)$, τότε:

$$\mathrm{E}_\zeta = \mathrm{E}_1 - (\mathrm{OA\Gamma}) = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2}R^2\eta\mu 120^0 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός