Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β’ Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22303**

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R), (Λ,R) τέμνονται στα σημεία Α, Β, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $ΚΛ = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $\hat{ΚΑΛ}$

(Μονάδες 7)

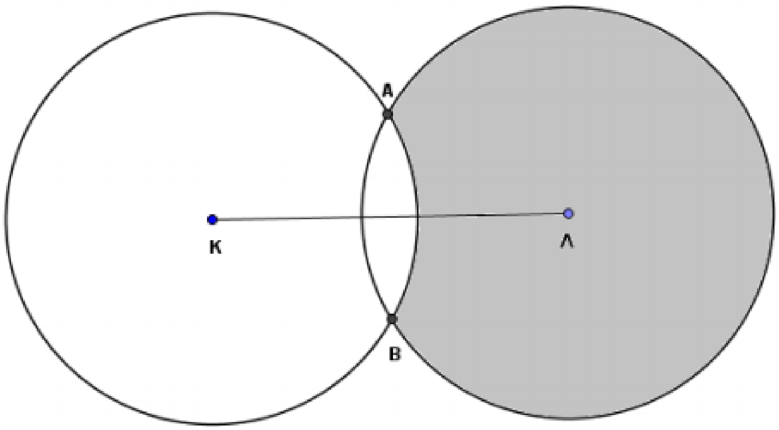
β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:

i) Του τετραπλεύρου ΑΚΒΛ.

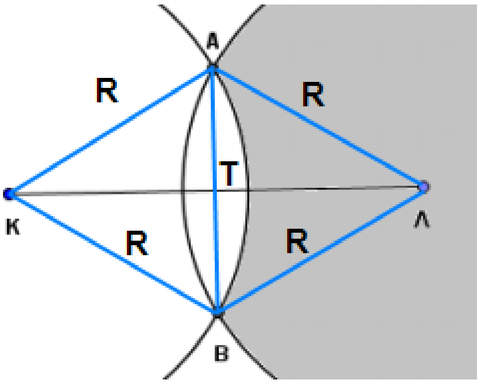
(Μονάδες 10)

ii) Του σκιασμένου μηνίσκου.

(Μονάδες 8)



Λύση:



α) Το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι ρόμβος (ΚΑ = ΑΛ = ΛΒ = ΚΒ = R), και ισχύει

$$\mathrm{KT}=\frac{\mathrm{K\Lambda}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΤ:

$$\mathrm{AT}^2=R^2-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=R^2-\frac{3R^2}{4}=\frac{4R^2-3R^2}{4}=\frac{R^2}{4}\Rightarrow \mathrm{AT}=\frac{R}{2},\ \text{οπότε}\ \mathrm{AB}=2\cdot\frac{R}{2}=R$$

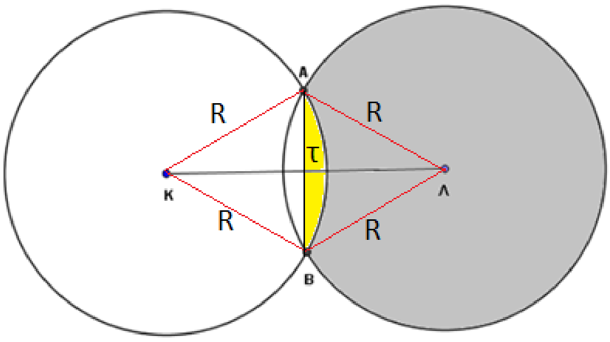
Συνεπώς το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισόπλευρο οπότε $\widehat{KAB}=60^0$.

Άρα $\widehat{KA\Lambda}=120^0$ αφού η ΑΒ είναι διχοτόμος της.

β i) Το εμβαδόν (ΑΚΒΛ) του ρόμβου ΑΚΒΛ δίνεται από το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, άρα

$$(\mathrm{KA\Lambda B})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{K\Lambda}=\frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{3}\ \text{άρα}\ (\mathrm{KA\Lambda B})=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

β ii) Αν $(\mathrm{K.AB})$ είναι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(\mathrm{K.AB})$ και (ΚΑΒ) το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ, το γραμμοσκιασμένο κίτρινο χρώμα κυκλικό τμήμα έχει εμβαδόν



$$\tau=(\mathrm{K.AB})-(\mathrm{KAB})=\frac{\pi R^2\cdot\cancel{60^0}}{\underset{6}{\cancel{360^0}}}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

άρα

$$\tau=\frac{R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}\Rightarrow 2\tau=2\cdot\frac{R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}\Rightarrow 2\tau=\frac{R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}\ \ \tau.\mu$$ Το

εμβαδόν $E_{\mu\eta\nu}$ του μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου (Λ, R) μείον το διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος τ

$$E_{\mu\eta\nu}=\pi R^2-\frac{R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}=\frac{6\pi R^2-2\pi R^2+3R^2\sqrt{3}}{6}=\frac{4\pi R^2+3R^2\sqrt{3}}{6}$$

Συνεπώς $E_{\mu\eta\nu}=\dfrac{R^2}{6}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός