Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22299**

Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο Μ τέτοιο, ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο (O,R) να είναι $3R^2$. Αν ΜΑ, ΜΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Μ προς τον κύκλο, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι ΜΑ=$R\sqrt{3}$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν

i) του τετραπλεύρου ΟΑΜΒ

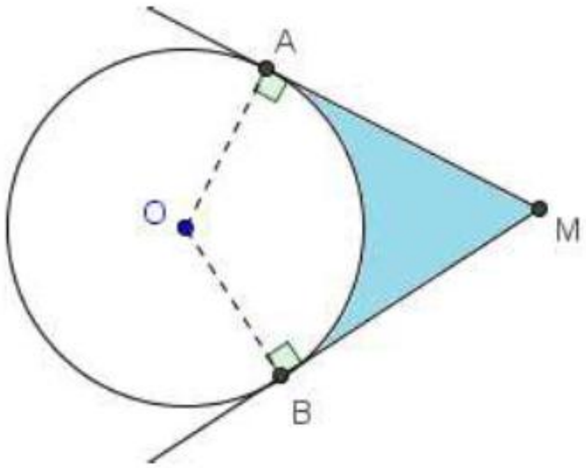
(Μονάδες 6)

ii) του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι (ΟΑΓΒ)= $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, όπου Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου με το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

(Μονάδες 5)



Λύση:

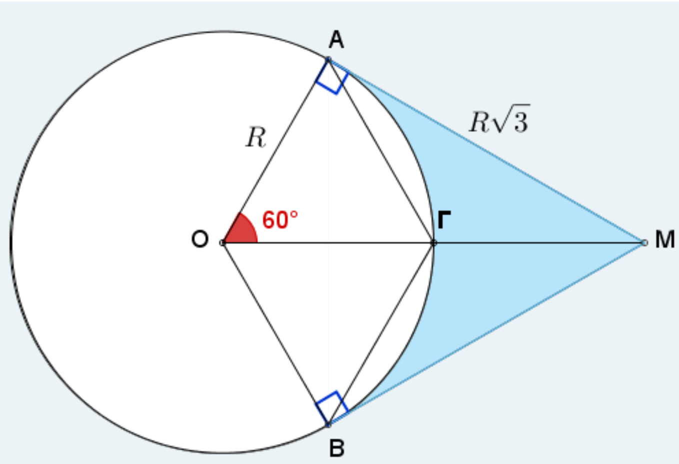
α) Από τη δύναμη του σημείου Μ ως προς τον κύκλο είναι(Ο, R) έχουμε

$\Delta^{M}(\mathrm{O},R)=\mathrm{OM}^2-R^2=3R^2$

όμως $\mathrm{OM}^2-R^2=\mathrm{MA}^2$ άρα

$(MA)^2=3R^2 \Leftrightarrow MA=R\sqrt{3}$

$(MA)^2=3R^2 \Leftrightarrow MA=R\sqrt{3}$



β) i) Το τετράπλευρο ΟΑΜΒ αποτελείται από τα δύο ίσα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΜΒ άρα το εμβαδόν (ΟΑΜΒ) του τετραπλεύρου ΟΑΜΒ έχουμε:

$$(OAMB)=2(OAM)=\frac{2OA\cdot AM}{2}=\frac{2R\cdot R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R^2$$

ii) Το ζητούμενο εμβαδόν E του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ βρίσκεται αν από το εμβαδόν (ΟΑΜΒ) του τετραπλεύρου ΟΑΜΒ αφαιρέσουμε το εμβαδόν E_1 του κυκλικού τομέα $\left(O,AB\right)$.

Επειδή $\varepsilon\varphi(M\hat{O}A)=\frac{R\sqrt{3}}{R}=\sqrt{3}$ έχουμε $M\hat{O}A=60^0$ Άρα ο κυκλικός τομέας $\left(O,AB\right)$ έχει γωνία $B\hat{O}A=120^0$ και εμβαδόν $E_1=\frac{\pi R^2\cdot 120}{360}=\frac{\pi R^2}{3}$. Οπότε:

$$E=(OAMB)-E_1=R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}\Leftrightarrow E=\frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$$

γ) Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος με μία γωνία 60^0, αφού τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΓ είναι ισόπλευρα. Άρα το εμβαδόν (ΟΑΓΒ) του ρόμβου ΟΑΓΒ θα είναι το διπλάσιο του εμβαδού (ΟΑΓ) του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΟΓ.

Οπότε $(OA\Gamma B)=2(OA\Gamma)=2\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow(OA\Gamma B)=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός