

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$  και οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = -x - 1$  και  $\varepsilon_2: y = x + 1$ . Να αποδείξετε ότι
- Η  $\varepsilon_1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ , ενώ η  $\varepsilon_2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .
  - Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $x^2 + 2x + 2 > (x+1)^2 \geq 0$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $\varepsilon_1$  κοντά στο  $-\infty$  και πάνω από την  $\varepsilon_2$  κοντά στο  $+\infty$ .
2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν:
- $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$
  - $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

3. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + a, & x \leq 0 \\ e^{\beta x}, & x > 0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$ .

Να αποδείξετε ότι:

- η  $f$  είναι συνεχής
- $f'(1) = -\frac{1}{2}$ .

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

- Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , ενώ
- Η  $g$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ (1-e^{-x}) \ln x & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $O(0,0)$ .