

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - x + 3$, $x \in [0, \pi]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότητα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότητα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1 + x$

ii) α) $\sin x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1+x)^v > 1+vx$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$

β) $(1+x)^v > 1+vx + \frac{v(v-1)}{2}x^2$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 3$.

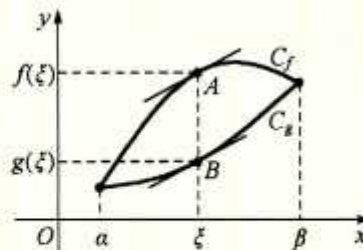
4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότητα.

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Το σημείο $\xi \in (a, \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.



6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-a)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2, \text{ με } a < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

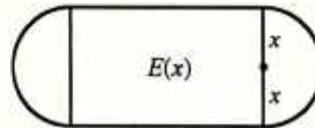
7. Με ένα σύρμα μήκους 4m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

- Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

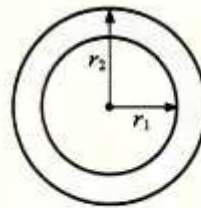
- Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περιμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



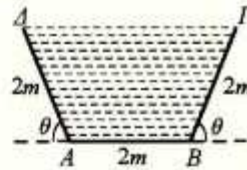
10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί τη συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

11. Έστω E το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για $t > 0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



- πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και
- πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή $ABΓΔ$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

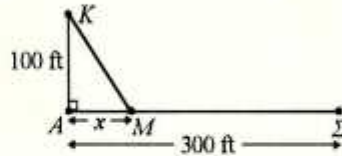


- i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής $ABΓΔ$ είναι ίσο με

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

- ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

13. Ένας κολυμβητής K βρίσκεται στη θάλασσα $100\text{ft}^{(1)}$ μακριά από το πλησιέστερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ



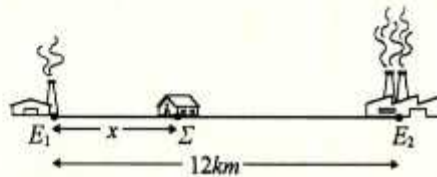
- βρίσκεται 300ft μακριά από το σημείο A . Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s .

- i) Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή $KM\Sigma$ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

- ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

14. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα



⁽¹⁾ $1\text{ft} = 30,48\text{cm}$

οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d , να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).