

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Για ποιές τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

ii) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

iii) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$

- β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$

ii) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = e^x - x$

ii) $f(x) = x^x, \quad x > 0.$

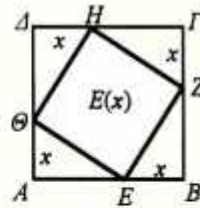
5. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

6. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό 400m^2 , το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.

7. Με συρματόπλεγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη x mg ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x , να γίνει μέγιστος.

9. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$,



- i) να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .
ii) να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνει ελάχιστο.

10. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ ευρώ, για $0 \leq x \leq 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι

$E(x) = 420x - 2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.