

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για μία συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σ' όλο το  $\mathbb{R}$  ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + a$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 1]$ .  
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ .  
iii) Αν  $-2 < a < 2$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 - 3x + a = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

3. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;  
ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;  
iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;
4. Η τιμή  $V$  (σε ευρώ) ενός προϊόντος,  $t$  μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο

$$V = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}.$$

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς, όμως, η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$  είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση  $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$  είναι ισοδύναμη με την  $f(x) = a$  και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

6. Να βρείτε τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}^*$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

7. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\iota\nu x$  είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

ii)  $\eta\mu x - \chi\sigma\iota\nu x > 0$ , για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

iii) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

8. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii)  $2\eta\mu x + \epsilon\phi x \geq 3x$ , για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .