

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$ 
  - i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$  και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα  $(0, 1)$ .
  - ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-1)\eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι:
  - i) Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$ .
  - ii) Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = 1 - x$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$ .
3. i) Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  με  $f'(x) \neq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.  
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu \frac{x}{2} = x$  αληθεύει μόνο για  $x = 0$ .
4. i) Να αποδείξετε ότι  $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
ii) Αν  $f$  είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , να αποδείξετε ότι για όλα τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει:
$$|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |\beta - a|.$$
5. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 4]$  και ισχύει  $2 \leq f'(x) \leq 5$  για κάθε  $x \in (0, 4)$ . Αν  $f(0) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $9 \leq f(4) \leq 21$ .
6. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και ισχύει  $f'(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Αν  $f(-1) = -1$  και  $f(1) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ , εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ .
7. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$$f(x) = 2^x \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$$
έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ .