

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (a, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $[0, 2]$ ii) $f(x) = \eta\mu 3x$, $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x$, $[0, \pi]$ iv) $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$.

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (a, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0, 4]$ ii) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$, $[-3, 2]$

3. Αν $a < \beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^a < \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a} < e^\beta \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln a}{\beta - a} < \frac{1}{a}.$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < a < \beta$.