

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g .
5. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.
6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως.
7. Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = a$, να αποδείξετε ότι
 - i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a} = f(a) + af'(a)$
 - ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{x - a} = e^a (f(a) + f'(a))$.
8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
$$f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x, \quad x \in [0, 2\pi],$$
στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x .
9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων
 - i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,
 - ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ σε καθεμία περίπτωση χωριστά.

10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

11. Έστω μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.