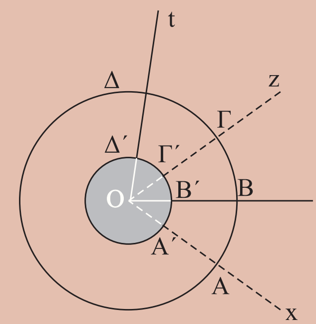
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $z\hat{O}t$ του διπλανού σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (Ο,R) και (Ο,R΄) με R΄<R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).



Σχ. 50

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο,ρ) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;*

2. *Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;*

3. *Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;*

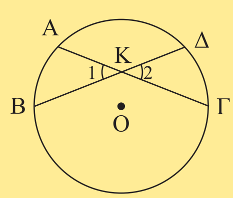
4. *Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;*

5. *Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α,Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;*

6. *Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας – ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;*

7. *Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;*

8. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;*

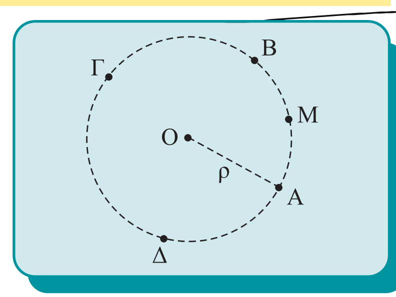
2. *Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο,ρ) και (Ο, R) με R>ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ) με R>ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.*

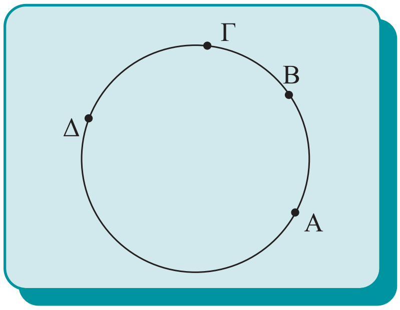
2. *Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.*

2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας



Σχήμα 51

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται ***διαδοχικά***, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι διαδοχικό με το επόμενό του, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι διαδοχικές.

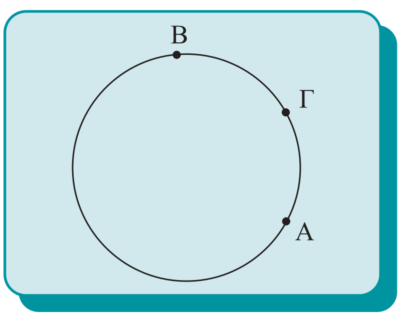


Σχήμα 52

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ λέγεται άθροισμα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma}$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι ίσο με το $\overset{\frown}{AB}$, τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ συμβολίζεται με $2\,\overset{\frown}{AB}$ και λέγεται διπλάσιο του $\overset{\frown}{AB}$. Όμοια ορίζεται και το $\nu\cdot\overset{\frown}{AB}$, όπου ν φυσικός.

Αν για δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου ισχύει $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \nu\overset{\frown}{AB}$, τότε το $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ένα ***ν-οστό του*** $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

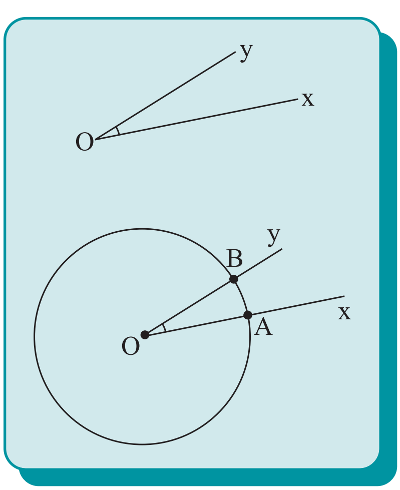
Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην § 3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.



Σχήμα 53

Αν $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A\Gamma}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους Α, τότε το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma B}$ λέγεται διαφορά του $\overset{\frown}{A\Gamma}$ από το $\overset{\frown}{AB}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A\Gamma}$. Όταν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$, τότε η διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο $\overset{\frown}{0}$.

Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης.. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας ***μοίρας*** που ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1°. Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται ***μέτρο*** του τόξου.



Σχήμα 54

Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60´) και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60´´).

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (Ο, ρ), και έστω $\overset{\frown}{AB}$ το τόξο στο οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως ***μέτρο*** της γωνίας $x\widehat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Το μέτρο της $x\widehat{O}y$ το συμβολίζουμε με $(x\widehat{O}y)$ ή απλά $x\widehat{O}y$.

Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90°, 180° και 360°.

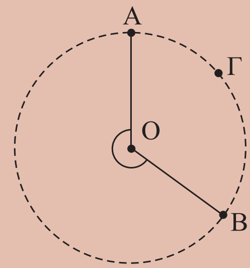
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου Ο, θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ (σχ.55), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{B\Gamma} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$.

Να υπολογισθούν:

(i) τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$,

(ii) τα μέτρα των γωνιών $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Gamma$ και $\Gamma\widehat{O}\Delta$.



Σχήμα 55

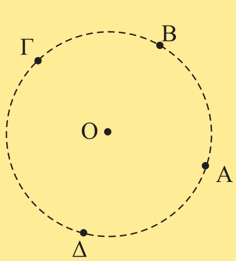
Λύση

(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2\overset{\frown}{\Gamma A}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ προκύπτει ότι $9\overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ ή
$\overset{\frown}{\Gamma A} = 40°$. Άρα $\overset{\frown}{AB} = 240°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$.
(ii) Η $A\widehat{O}B$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\overset{\frown}{AB}$, επομένως $A\widehat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 240°$ (μη κυρτή). Όμοια $B\widehat{O}\Gamma = 80°$ και $\Gamma\widehat{O}\Delta = 40°$.

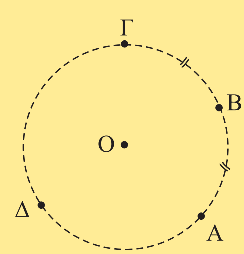
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:*
i) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$,
ii) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,
iii) $\overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.



2. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:*
i) $2\overset{\frown}{AB}$,
ii) $2\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,
iii) $2\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$,
iv) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.

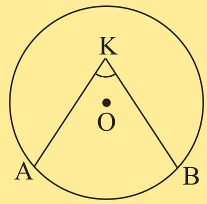


3. *Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:*
α. αρνητικός   β. μηδέν   γ. θετικός   δ. μη αρνητικός.
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. *Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;*

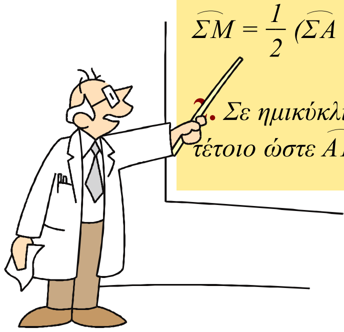
5. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = \mu°$ *(παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία* $A\widehat{K}B$ *θα είναι* $\mu°$*;*

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, ώστε $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.*
i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{PM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB})$.
ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$, να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B})$.



2. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$. Να βρείτε τα μέτρα:*
i) των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma B}$,
ii) των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

3. *Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.*

4. *Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

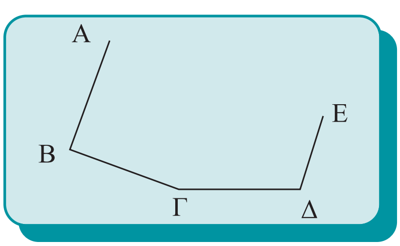
1. *Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.*

2. *Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.*

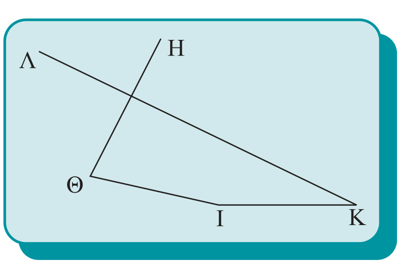
3. *Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.*

Ευθύγραμμα σχήματα

2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου



Σχήμα 56



Σχήμα 57

Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή*** ή απλά ***τεθλασμένη***. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ΑΒΓΔΕ.

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε λέγονται ***κορυφές*** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές Α και Ε λέγονται ***άκρα*** της. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται ***πλευρές*** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται ***περίμετρος*** της τεθλασμένης.

Μία τεθλασμένη λέγεται ***απλή***, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο. Έτσι, η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η ΗΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.

Μία τεθλασμένη λέγεται ***κυρτή***, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του,