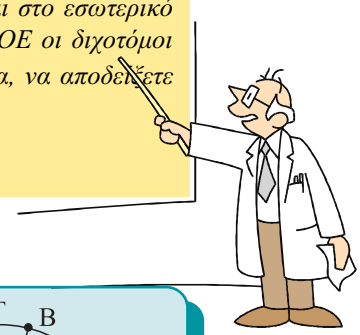
2. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A+\Gamma\hat{O}B}{2}$.

3. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A-\Gamma\hat{O}B}{2}$.

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta+B\hat{O}\Gamma}{2}$.

2. *Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\Delta\hat{O}E = \dfrac{1}{2}\llcorner$.



Κύκλος

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).

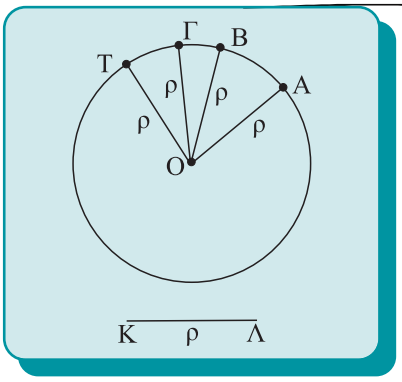
Κύκλος με ***κέντρο*** Ο και ***ακτίνα*** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα ΟΜ , όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου.

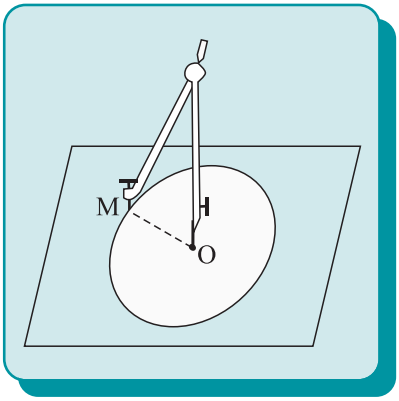
Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο,ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει ΟΜ=ρ. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται ***γεωμετρικός τόπος***.

Έτσι ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.



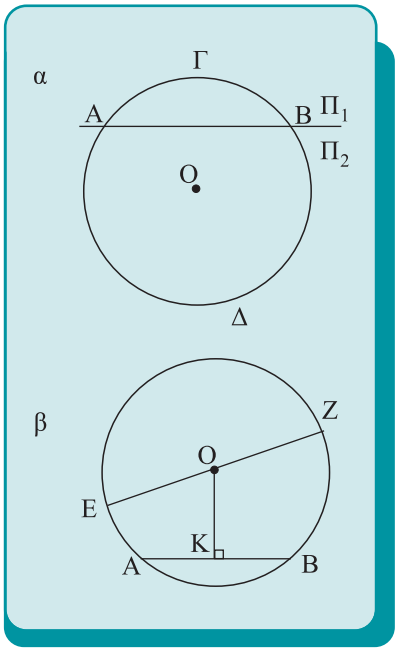
Σχήμα 39



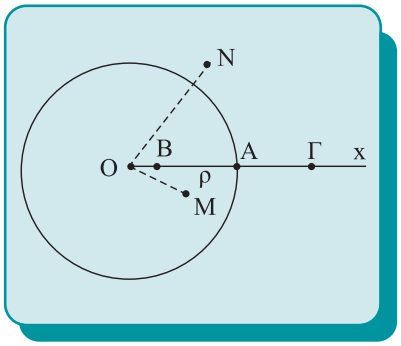
Σχήμα 40

• Τόξα - Χορδές

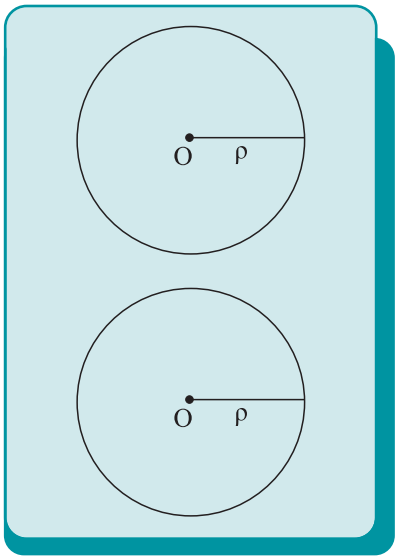
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο Π_2.



Σχήμα 41



Σχήμα 42



Σχήμα 43

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται ***τόξο*** του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό από τα άκρα του λέγεται ***εσωτερικό σημείο*** του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα Α και Β, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα Α,Β συμβολίζονται με $\overset{\frown}{AΓB}$ το ένα και με $\overset{\frown}{AΔB}$ το άλλο.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α,Β ενός τόξου λέγεται ***χορδή*** του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.

Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται ***απόστημα*** της χορδής.

Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται ***διάμετρος*** του κύκλου.

Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται ***αντιδιαμετρικά*** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ. 41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.

Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό**.

• Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ) και μία ημιευθεία Ox που τον τέμνει στο σημείο Α. Για κάθε σημείο Β (σχ.42) της ακτίνας ΟΑ, διαφορετικό του Α ισχύει ΟΒ<ρ, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της ΟΑ ισχύει ΟΓ>ρ. Τα σημεία Β,Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Γενικά, ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.42) λέγεται ***εσωτερικό*** σημείο του κύκλου, όταν ΟΜ<ρ, ενώ ένα σημείο Ν λέγεται ***εξωτερικό*** του κύκλου, όταν ΟΝ>ρ.

• Ίσοι κύκλοι

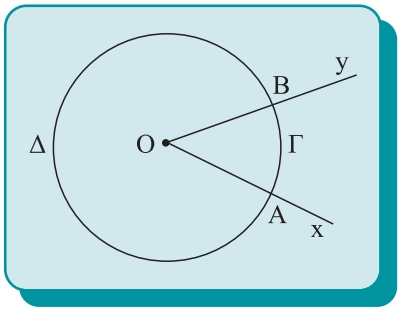
Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται ***επίκεντρη*** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $Α\hat{O}Β$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$.



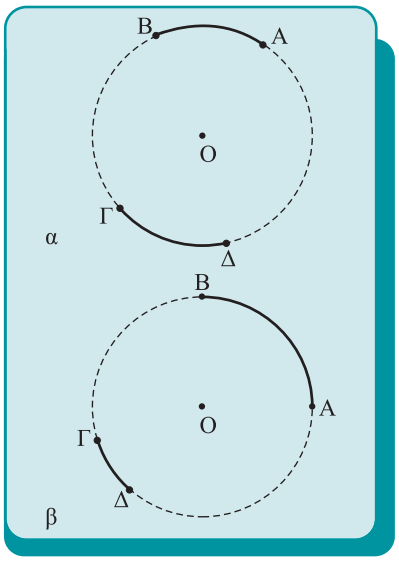
Σχήμα 44

• Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$ (σχ.45α).

Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ (ή το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$) και γράφουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} > \overset{\frown}{ΓΔ}$, όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{ΑΒ}$ (σχ.45β).



Σχήμα 45

Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

• Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

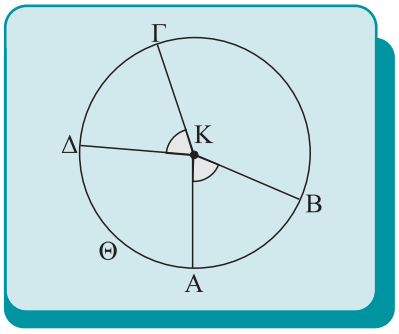
Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

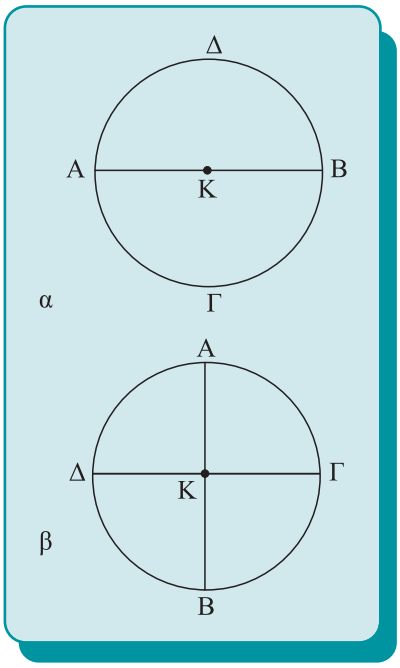
Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $Α\hat{K}Β$ και $Γ\hat{K}Δ$ είναι ίσες.



Σχήμα 46

Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\Gamma\hat{K}\Delta$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $A\hat{K}B$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 47

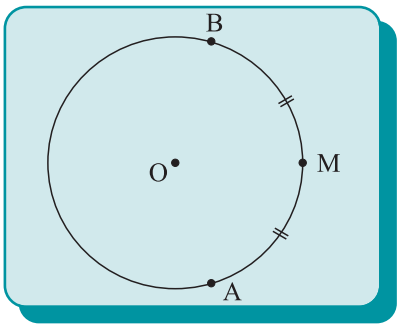
Πορίσματα

(i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

(ii) Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

(iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ και $\overset{\frown}{B\Delta A}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (Κ) από την διάμετρο του ΑΒ, λέγεται ***ημικύκλιο***, ενώ το καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma B}$, $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρείται από τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, λέγεται ***τεταρτοκύκλιο***.



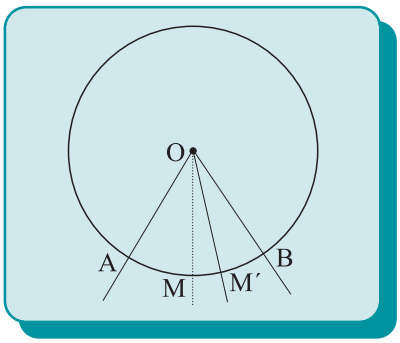
Σχήμα 48

• Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο Μ ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.48) λέγεται ***μέσο*** του, όταν τα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{MB}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

Θεώρημα ΙΙ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.



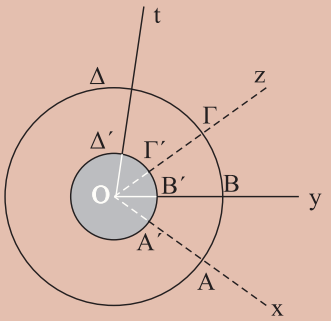
Σχήμα 49

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του (σχ.49). Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}M$ και $M\hat{O}B$ είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το Μ΄, τότε η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $z\hat{O}t$ του διπλανού σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (O,R) και (O,R΄) με R΄<R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).



Σχ. 50

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο,ρ) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;*

2. *Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;*

3. *Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;*

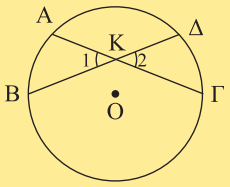
4. *Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;*

5. *Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α,Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;*

6. *Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας – ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;*

7. *Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;*

8. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;*

2. *Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο,ρ) και (Ο, R) με R>ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).*

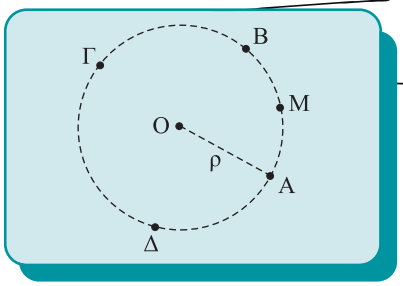
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ) με R>ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.*

2. *Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.*

2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται ***διαδοχικά***, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι



Σχήμα 51