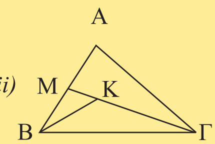
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:*

i)

ii)



2. *Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε: i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών, ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.*

3. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.*

4. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$, *ii)* $ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

2. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $ΓΜ = \dfrac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$, *ii)* $ΔΜ = \dfrac{ΔΑ + ΔΒ}{2}$.

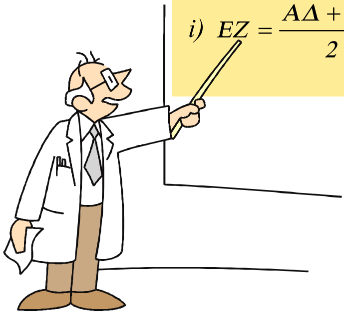
3. *i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α,Β,Γ, ισχύει* $ΑΒ \leq ΑΓ + ΓΒ$.

ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $ΑΔ \leq ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ$.

Σύνθετα θέματα

1. *Αν Α,Β,Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $ΔΕ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

2. *Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους (ν ≥ 2).*

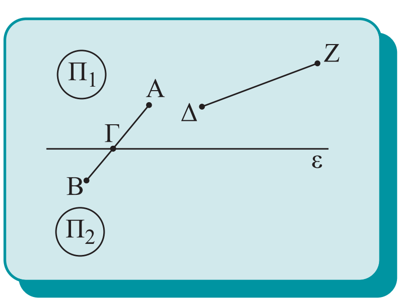


Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη $Π_1$ και $Π_2$, τα οποία βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** αυτής. Τα σημεία του $Π_1$, μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ***ημιεπίπεδο***.



Σχήμα 16

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το $Π_1$ συμβολίζεται και (ε,Α). Όμοια το $Π_2$ συμβολίζεται (ε,Β).

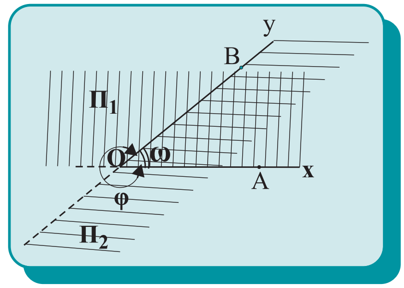
Για τα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ δεχόμαστε ότι:

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται **μεταξύ** των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).

2.12 Η γωνία

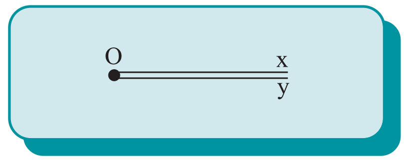
Από τυχαίο σημείο Ο ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Οx και Oy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα.
Έστω σημεία Α, Β των ημιευθειών Οx, Oy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Οx, Β) και (Οy, Α) λέγεται ***κυρτή γωνία*** με ***κορυφή*** Ο και ***πλευρές*** Οx και Oy. Συμβολίζεται με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της.



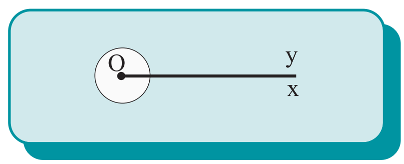
Σχήμα 17

Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Οx και Oy λέγεται ***μη κυρτή γωνία*** με κορυφή Ο και πλευρές Οx και Oy.
Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εσωτερικό*** της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται ***εξωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εξωτερικό*** της γωνίας.
Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Οx και Oy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

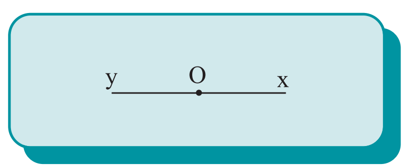
- Αν οι ημιευθείες Οx και Oy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Οx (σχ.18) και η κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται ***μηδενική γωνία***, ενώ η μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται ***πλήρης γωνία.***
- Αν οι ημιευθείες Οx, Oy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται ***ευθεία γωνία.***



Σχήμα 18



Σχήμα 19

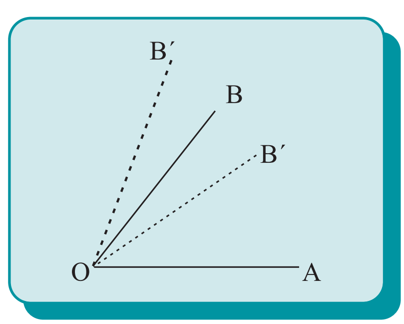


Σχήμα 20

Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.

2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή Ο, την ΟΑ κοινή πλευρά και τις ΟΒ, ΟΒ΄ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της ΟΑ (σχ.21α). Τότε:
(i) Αν οι πλευρές ΟΒ και ΟΒ΄ συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B = A\hat{O}B'$.
(ii) Αν η πλευρά ΟΒ΄ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' < A\hat{O}B$.
(iii) Αν η πλευρά ΟΒ΄ βρίσκεται εκτός της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' > A\hat{O}B$.

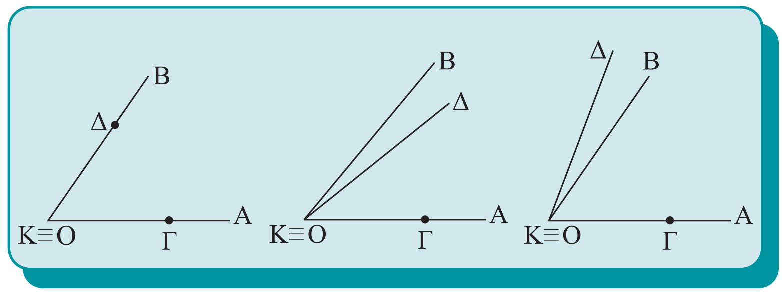


Σχήμα 21α

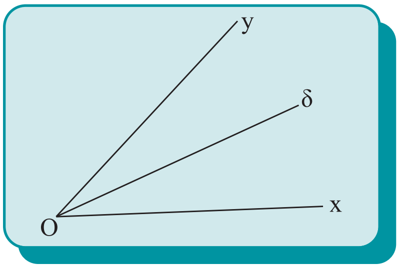
Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\Gamma\hat{K}\Delta$ έτσι ώστε, η κορυφή

της K να ταυτισθεί με το O και η μία της πλευρά ΓΚ να συμπέσει με την πλευρά OA της γωνίας $A\hat{O}B$.
Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν η πλευρά ΚΔ συμπίπτει με την OB, τότε οι γωνίες είναι ίσες: $A\hat{O}B = \Gamma\hat{K}\Delta$ (σχ.21β)
- Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μικρότερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta < A\hat{O}B$ (σχ.21γ).
- Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta > A\hat{O}B$ (σχ.21δ).



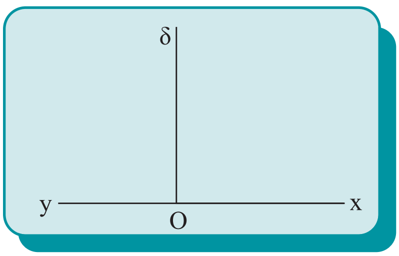
Σχήμα 21β *Σχήμα 21γ* *Σχήμα 21δ*



Σχήμα 22

Διχοτόμος γωνίας

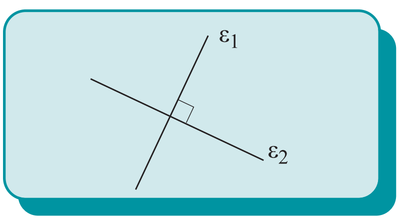
Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Oδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ.22).
Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.



Σχήμα 23

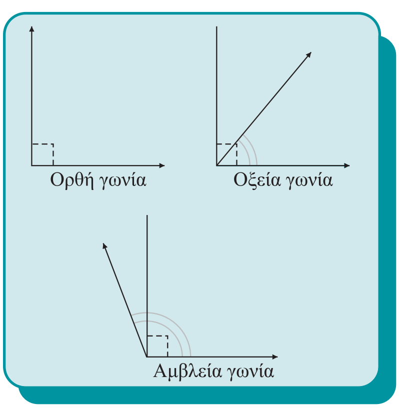
Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και Oδ η διχοτόμος της (σχ.23). Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται ***ορθή*** γωνία, και θα τη συμβολίζουμε ∟.
Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες ***κάθετες*** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ.24).



Σχήμα 24

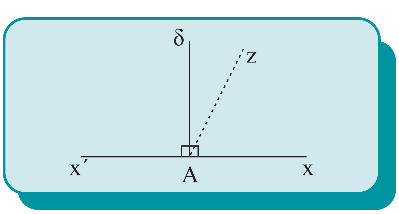
Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***οξεία*** αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται ***αμβλεία*** αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).



Σχήμα 25

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

Ας θεωρήσουμε ευθεία x΄x και ένα σημείο A (σχ.26).
Αν το A είναι σημείο της ευθείας και Aδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x\hat{A}x'$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $A\delta \perp x'x$.



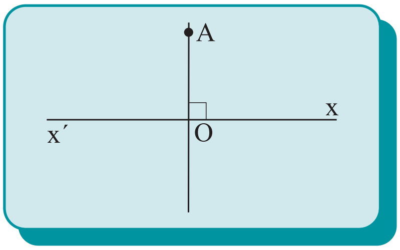
Σχήμα 26

Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Az (σχ.26), διαφορετική της Αδ, είναι κάθετη στην xx΄, τότε θα είναι $x\hat{A}z = z\hat{A}x' = 1\llcorner$, δηλαδή η Az είναι διχοτόμος της $x\hat{A}x'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.

Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το Α δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §.3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.

Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος ΑΟ που άγεται από το σημείο Α στην ευθεία x΄x λέγεται ***απόσταση*** του σημείου Α από την ευθεία x΄x (σχ.27).



Σχήμα 27

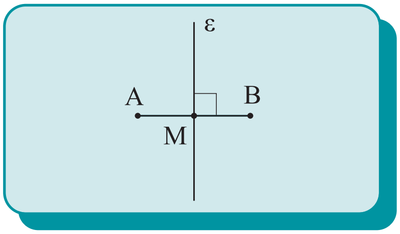
ΣΧΟΛΙΟ

Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο Α της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Αδ υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη x'x (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $x'\hat{A}x$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

- **Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος – Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα**

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται ***μεσοκάθετος*** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.28).

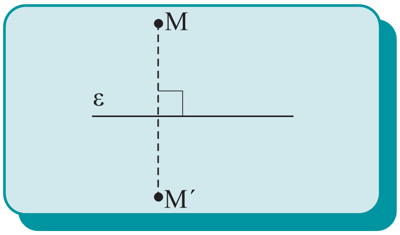


Σχήμα 28

Τα σημεία Α, Β λέγονται ***συμμετρικά*** ως προς την ευθεία ε. Η ευθεία ε λέγεται ***άξονας συμμετρίας***.

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου Μ ως προς μια ευθεία ε, φέρουμε το κάθετο τμήμα από το Μ προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο Μ΄ της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του Μ (σχ.29).

Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.

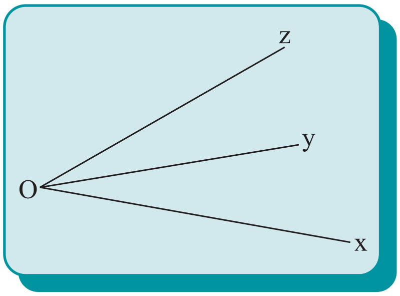


Σχήμα 29

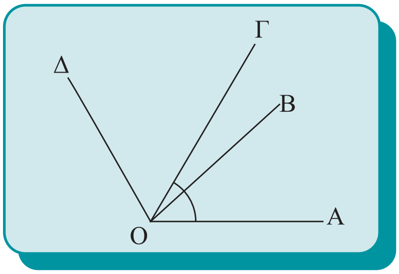
2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

- **Εφεξής γωνίες**

Δύο γωνίες λέγονται ***εφεξής***, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ (σχ.30) είναι εφεξής.



Σχήμα 30



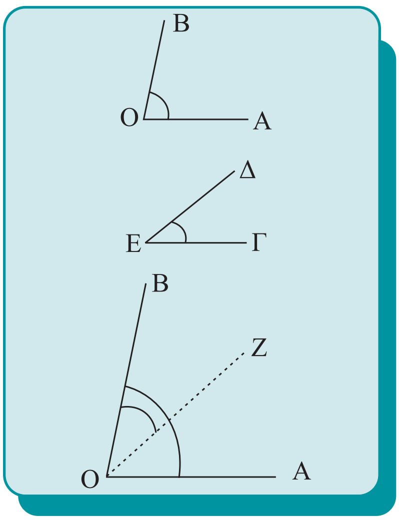
Σχήμα 31

Η γωνία $A\hat{O}B$ (σχ. 31) είναι εφεξής με τη $B\hat{O}\Gamma$, και η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής με τη $\Gamma\hat{O}\Delta$. Οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ λέγονται ***διαδοχικές***.

• Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

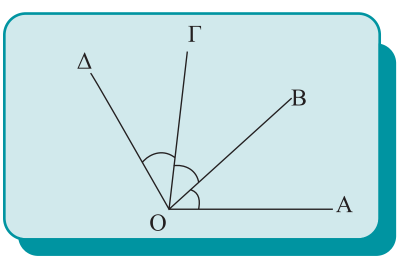
(i) ***Άθροισμα*** δύο εφεξής γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ λέγεται η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31).

Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta$ (σχ.31).



Σχήμα 32

(ii) Έστω $A\hat{O}B > \Gamma\hat{E}\Delta$ (σχ.32). Μετατοπίζουμε τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπέσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $A\hat{O}B$ (σχ.32). Η γωνία $Z\hat{O}B$ λέγεται ***διαφορά*** της γωνίας $\Gamma\hat{E}\Delta$ από την $A\hat{O}B$ και συμβολίζεται $A\hat{O}B - \Gamma\hat{E}\Delta$. Είναι φανερό ότι $\Gamma\hat{E}\Delta + Z\hat{O}B = A\hat{O}B$.
Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.
(iii) ***Γινόμενο*** της γωνίας $A\hat{O}B$ επί το φυσικό αριθμό ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με $A\hat{O}B$.



Σχήμα 33

Γράφουμε $\nu \cdot A\hat{O}B = \underbrace{A\hat{O}B + A\hat{O}B + \ldots + A\hat{O}B}_{\nu \text{ όροι}}$,

π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 3A\hat{O}B$ ή ισοδύναμα

$A\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}\Delta}{3}$ (σχ.33).

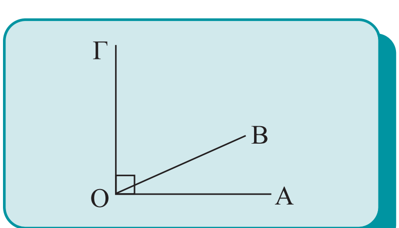
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

• Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***συμπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***συμπλήρωμα*** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 34

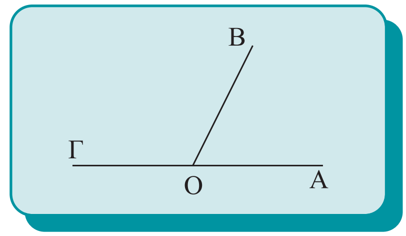
• Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***παραπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***παραπλήρωμα*** της άλλης (σχ.35).

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

Θεώρημα

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.



Σχήμα 35

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

ΣΧΟΛΙΟ

Αντίστροφα Θεωρήματα *λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:*
Ευθεία Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.*
Αντίστροφη Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.*

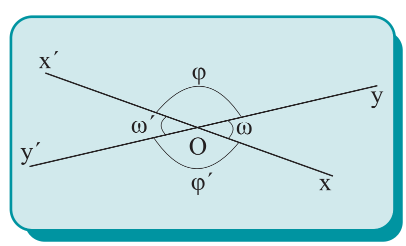
• Κατακορυφήν γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***κατακορυφήν***, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

Θεώρημα Ι

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



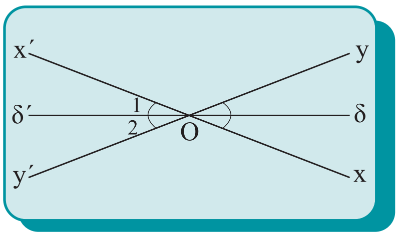
Σχήμα 36

Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.

Θεώρημα ΙΙ

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.



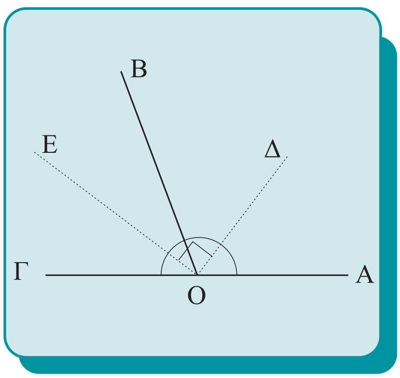
Σχήμα 37

Απόδειξη

Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος Οδ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.

Αν Οδ΄ είναι η προέκταση της Οδ, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν) .

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ΄ είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.



Σχήμα 38

Θεώρημα ΙΙΙ

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).

Τότε $A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\llcorner$ ή $2\Delta\hat{O}B + 2B\hat{O}E = 2\llcorner$ ή

$\Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 1\llcorner$ ή $\Delta\hat{O}E = 1\llcorner$. Άρα $O\Delta \perp OE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

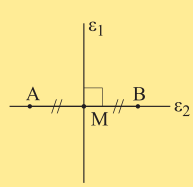
1. *Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:*

i) την ευθεία ε_1,

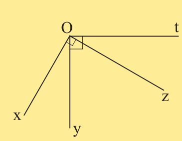
ii) την ευθεία ε_2,

iii) το σημείο Μ.

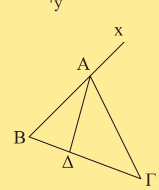
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



2. *Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.*

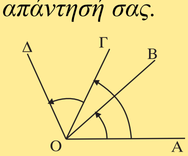


3. *Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.*



4. *i) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εφεξής;*

ii) Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ είναι διαδοχικές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



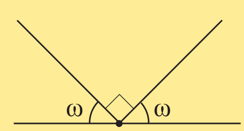
5. *Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}t$, ώστε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$.*

Να δικαιολογήσετε ότι $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

2. *Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος.*



3. *Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;*

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.*

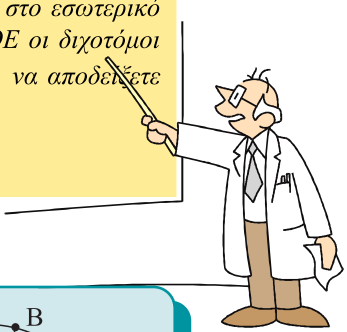
2. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A+\Gamma\hat{O}B}{2}$.*

3. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A-\Gamma\hat{O}B}{2}$.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Οx, Οy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta+B\hat{O}\Gamma}{2}$.*

2. *Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E = \dfrac{1}{2}\llcorner$.*



Κύκλος

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).

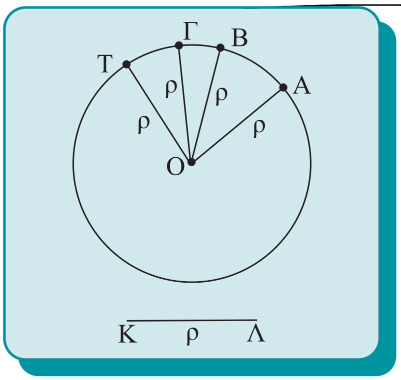
Κύκλος με ***κέντρο*** Ο και ***ακτίνα*** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα ΟΜ , όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου.

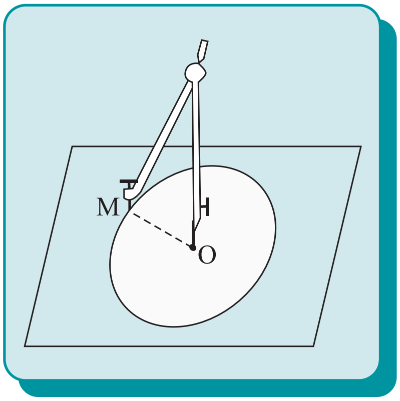
Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο,ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει ΟΜ=ρ. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται ***γεωμετρικός τόπος***.

Έτσι ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.



Σχήμα 39



Σχήμα 40

- **Τόξα - Χορδές**

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο Π_2.