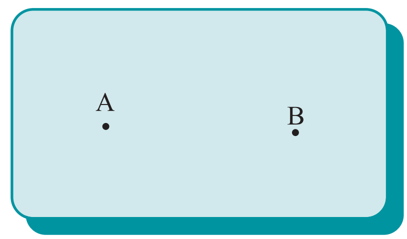
Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

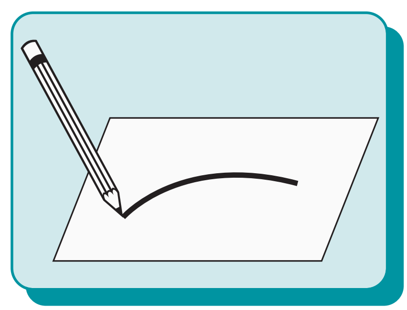
2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

Ένα ***σημείο*** δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).



Σχήμα 1

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία ***γραμμή*** (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.



Σχήμα 2

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την ***επιφάνειά*** του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.

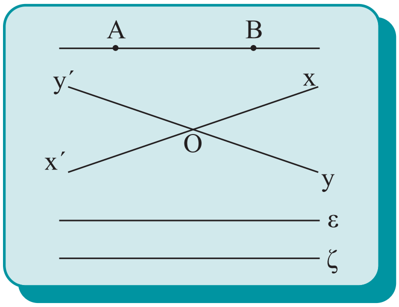
Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το ***επίπεδο***.

2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το ***επίπεδο***. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου.

Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται ***επίπεδα σχήματα.***

2.3 Η ευθεία

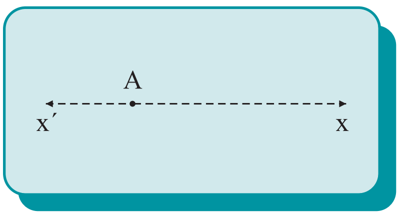


Σχήμα 3

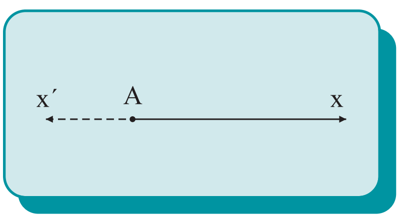
Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία A,B διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία AB ή BA (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα (ε,ζ,...) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως x΄x.
Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται ***τεμνόμενες*** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται ***τομή*** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες.***

Το ευθύγραμμο τμήμα

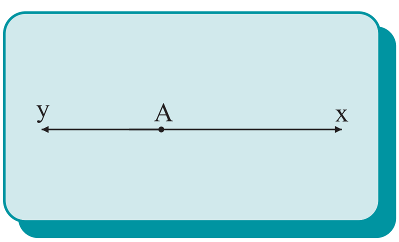
2.4 Η ημιευθεία



Σχήμα 4



Σχήμα 5

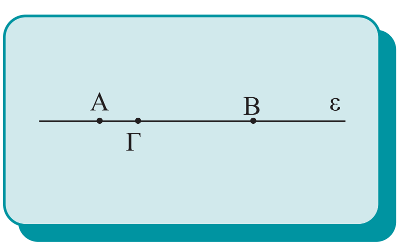


Σχήμα 6

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία x΄x και σημείο της A (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax΄ και τα ονομάζουμε ***ημιευθείες*** με ***αρχή*** το σημείο A.

Η ευθεία x΄x λέγεται ***φορέας*** της ημιευθείας Ax (σχ.5).
Δύο ημιευθείες Ax, Ay με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους A, όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται ***αντικείμενες*** (σχ.6).

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα



Σχήμα 7

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A,B. ***Ευθύγραμμο τμήμα*** AB ή BA (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.
Τα σημεία A και B λέγονται ***άκρα*** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται ***φορέας*** του τμήματος. Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB (σχ.7), λέμε ότι τα A,B βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** του Γ, ενώ τα B,Γ είναι ***προς το ίδιο μέρος*** του A. Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται ***διαδοχικά.***

Σημείωση:
Οταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα AB, θα εννοούμε προς το μέρος του B, ενώ το BA προς το μέρος του A.

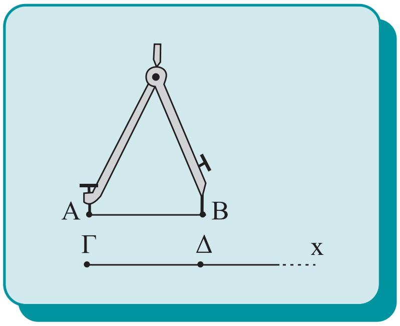
2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί **να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.**
Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται ***ομόλογο*** (ή ***εικόνα***) του αρχικού.

2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

- **Ίσα ευθύγραμμα τμήματα**

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ = ΓΔ (σχ.8).
Άμεση συνέπεια του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.



Σχήμα 8

- **Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο**

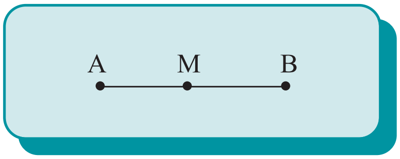
Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η ημιευθεία Γx. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο Γ, οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της Γx (σχ.8). Τότε το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το αρχικό.

- **Γεωμετρικές κατασκευές**

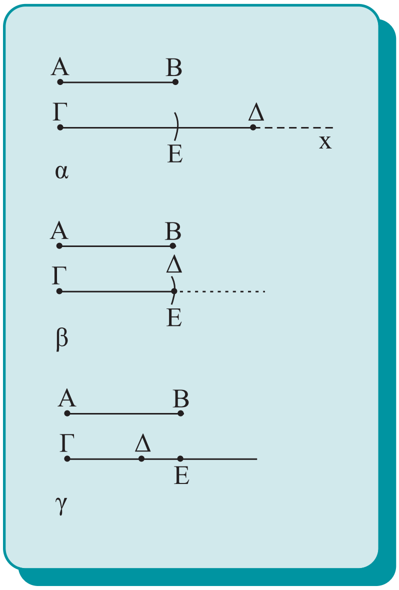
Η παραπάνω διαδικασία λέγεται ***γεωμετρική κατασκευή*****.** Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα ***γεωμετρικά όργανα,*** δηλαδή τον ***κανόνα*** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το ***διαβήτη.***

- **Μέσο ευθύγραμμου τμήματος**

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΑΜ=ΜΒ (σχ.9).
Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.



Σχήμα 9



Σχήμα 10

• Άνισα ευθύγραμμα τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΓΔ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx. Μετατοπίζουμε το ΑΒ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο Ε της Γx, ώστε ΑΒ=ΓΕ.

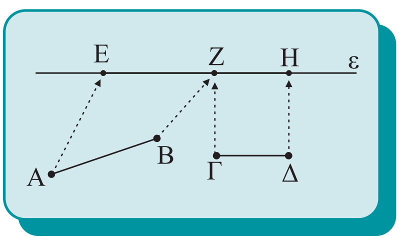
• Αν το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ<ΓΔ (σχ. 10α).

• Αν το Ε ταυτίζεται με το Δ, τότε ΑΒ=ΓΔ, όπως προηγούμενα (σχ.10β).

• Αν το Ε δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ>ΓΔ (σχ.10γ).

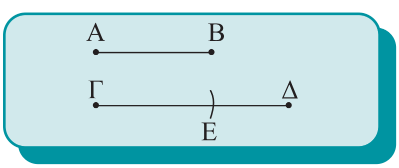
2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.



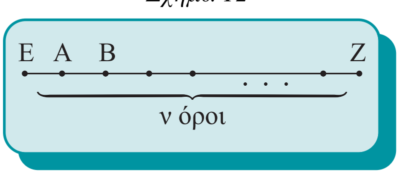
Σχήμα 11

(i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα ΕΖ=ΑΒ και ΖΗ=ΓΔ (σχ.11). Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα ΕΗ, που λέγεται ***άθροισμα*** των ΑΒ και ΓΔ και γράφουμε **ΕΗ=ΑΒ+ΓΔ**. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***πρόσθεση*** δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).



Σχήμα 12

(ii) Αν ΑΒ<ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΓΕ=ΑΒ (σχ.12). Το τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ και συμβολίζεται **ΕΔ=ΓΔ–ΑΒ**.



Σχήμα 13

(iii) Αν ν φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται ***γινόμενο*** του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, το οποίο είναι το άθροισμα ν διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ (σχ.13). Γράφουμε

$\mathbf{EZ = \nu \cdot AB}$ ή ισοδύναμα $\mathbf{AB = \dfrac{EZ}{\nu}}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Αν ΑΒ=ΓΔ, τότε η διαφορά ΓΔ–ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.*

Δραστηριότητα

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

i) ΑΒ+ΓΔ =ΓΔ+ΑΒ ***(αντιμεταθετική)***

ii) (ΑΒ+ΓΔ) +ΕΖ = ΑΒ+(ΓΔ +ΕΖ) ***(προσεταιριστική)***.

2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων

• Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

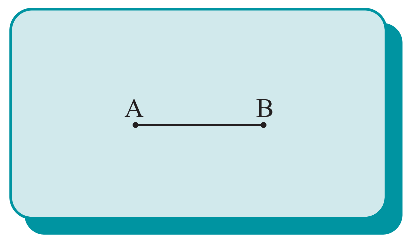
Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται ***μονάδα μήκους***. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε ΓΔ = ρΑΒ. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται ***μήκος*** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα με ΑΒ, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

• Απόσταση δύο σημείων

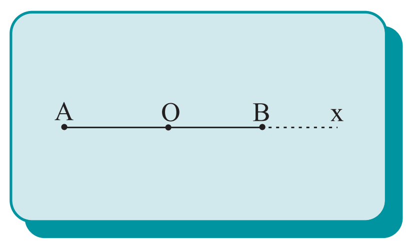
Έστω δύο σημεία Α,Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται ***απόσταση*** των σημείων Α και Β.



Σχήμα 14

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Οx να πάρουμε τμήμα ΟΒ = ΟΑ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται ***συμμετρικό*** του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται ***συμμετρικά*** σημεία ως προς ***κέντρο συμμετρίας*** το σημείο Ο. Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.



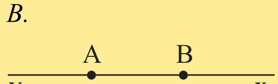
Σχήμα 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:*
i) κανένα κοινό σημείο *ii) ένα κοινό σημείο*
iii) δύο κοινά σημεία *iv) άπειρα κοινά σημεία*
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

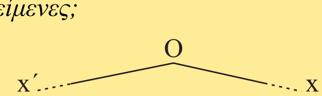
2. *Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:*
i) με αρχή το Α,
ii) με αρχή το Β.



Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

3. *Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.*

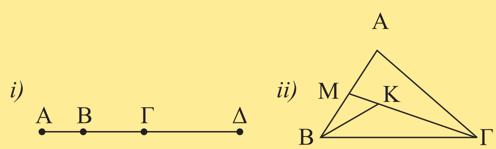
4. *Οι ημιευθείες Οx΄ και Οx του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;*



5. *Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:*



2. *Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε: i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών, ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.*

3. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.*

4. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$, ii) $ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ$.

2. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:*

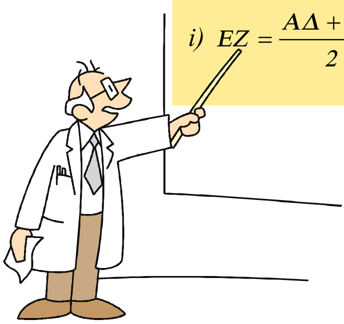
i) $ΓΜ = \dfrac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$, ii) $ΔΜ = \dfrac{ΔΑ + ΔΒ}{2}$.

3. *i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α,Β,Γ, ισχύει $ΑΒ \leq ΑΓ+ΓΒ$.*
ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $ΑΔ \leq ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ$.

Σύνθετα θέματα

1. *Αν Α,Β,Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΔΕ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.*

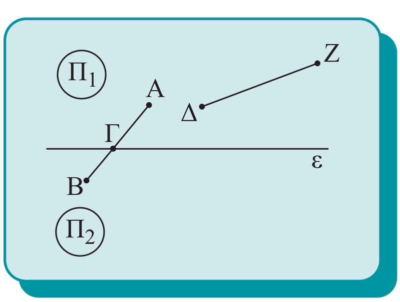
2. *Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους ($ν \geq 2$).*



Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:
Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη $Π_1$ και $Π_2$, τα οποία βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** αυτής. Τα σημεία του $Π_1$, μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ***ημιεπίπεδο***.



Σχήμα 16

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το $Π_1$ συμβολίζεται και (ε,Α). Όμοια το $Π_2$ συμβολίζεται (ε,Β).

Για τα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ δεχόμαστε ότι:

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται **μεταξύ** των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).