

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δίνουμε τις μορφές των απλών κλασμάτων στις οποίες μπορεί να αναχθεί μία ρητή συνάρτηση.

i) $\frac{A}{x-a}$

ii) $\frac{A}{(x-a)^n}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$

iii) $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+\gamma}$, όπου $b^2-4a\gamma < 0$

iv) $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+\gamma)^n}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$ και $b^2-4a\gamma < 0$

Μια ρητή συνάρτηση είναι της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

όπου: $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Για την ολοκλήρωσή της θα φροντίζουμε να σπάσουμε το κλάσμα σ' απλά κλάσματα των οποίων τα ολοκληρώματα είναι γνωστά.

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για το υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$I = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+\gamma} dx \quad \text{όταν} \quad \Delta = b^2 - 4a\gamma < 0$$

Κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$x = t - \frac{b}{2a}$$

οπότε **απαλείφεται ο πρωτοβάθμιος όρος** στον παρονομαστή και αναγόμεστε στα ολοκληρώματα του λογάριθμου και του τόξου εφαπτομένης.

Τονίζουμε ότι η προηγούμενη αντικατάσταση χρησιμοποιείται πάντα όταν θέλουμε να γράψουμε το $ax^2 + bx + \gamma$ στην μορφή $kt^2 + \mu$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+6x+10} dx$$

✎ Ο παρονομαστής έχει μιγαδικές ρίζες αφού $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που γράψαμε πιο πάνω, θέτουμε $x = t - 3$, $dx = dt$.

Έτσι στον παρονομαστή θα απαλειφούν οι πρωτοβάθμιοι όροι του x .

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{t-3+1}{(t-3)^2+6(t-3)+10} dt = \\ &= \int \frac{t-2}{t^2-6t+9+6t-18+10} dt = \int \frac{t-2}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 2 \arctan t + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+6x+10) - 2 \arctan(x+3) + c \end{aligned}$$

Η ίδια μεθοδολογία εφαρμόζεται και για ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$$

Θέτουμε $x = t-1$ και έχουμε $dx = dt$.

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3(t-1)+2}{[(t-1)^2+2(t-1)+10]^2} dt = \\ &= \int \frac{3t-1}{(t^2+9)^2} dt = 3 \int \frac{t}{(t^2+9)^2} dt - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Όμως για τα ολοκληρώματα της σχέσης (1) έχουμε:

$$\text{α)} \quad \int \frac{t}{(t^2+9)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2+9)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+9)'}{(t^2+9)^2} dt = -\frac{1}{2(t^2+9)} + c_1 \quad (2)$$

β) Από τον τύπο (2.12) που γράγαμε στην σελίδα 75, για $a=3$ παίρνουμε:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{t}{18(t^2+9)} + \frac{1}{54} \arctan(t/3) + c_2 \quad (3)$$

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα από τη σχέση (1) και τις (2), (3), είναι:

$$I = -\frac{3}{2(t^2+9)} + c_1 - \frac{t}{18(t^2+9)} - \frac{1}{54} \arctan(t/3) - c_2$$

Τέλος για $t = x+1$ και $c_1 - c_2 = c$ προκύπτει:

$$I = -\frac{x+28}{18(x^2+2x+10)} - \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$$

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ
ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1^η

**Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΕΙΝΑΙ
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΠΟ ΤΟ
ΒΑΘΜΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ**

Έστω ότι η ρητή συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού, έστω n και το $Q(x)$ βαθμού m .

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της ρητής συνάρτησης και έχουμε:

α) Αν ο παρονομαστής πλέον παραγοντοποιημένος έχει τη μορφή:

$$Q(x) = (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2) \cdot (x - \rho_3)$$

δηλαδή έχει απλές ρίζες, τότε η ρητή συνάρτηση αναλύεται σε απλά κλάσματα, ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)} = \frac{A}{x - \rho_1} + \frac{B}{x - \rho_2} + \frac{\Gamma}{x - \rho_3}$$

Τα A, B, Γ μπορούν να υπολογιστούν από τα εκ' ταυτότητας ίσα πολυώνυμα, ή θέτοντας τιμές στο x ($x = \rho_1, x = \rho_2, x = \rho_3$) μετά από την απαλοιφή των παρονομαστών, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

➤ **Θυμίζουμε:**

Δύο πολυώνυμα είναι εκ' ταυτότητας ίσα, όταν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων είναι ίσοι.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$$

✎ Έχουμε ρητή συνάρτηση με βαθμό παρονομαστή μεγαλύτερο του αριθμητή. Επίσης ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος, οπότε αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα. Δηλαδή:

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x-4}$$

Με απαλοιφή των παρονομαστών, παίρνουμε:

$$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + \Gamma(x-1)(x-2) \quad (1)$$

Ο υπολογισμός των A, B, Γ μπορεί να γίνει με τους τρόπους:

1ος τρόπος (τιμές στο x)

Για $x = 1$ στην σχέση (1), παίρνουμε:

$$1 + 2 + 6 = A(1-2)(1-4) + B \cdot 0 + \Gamma \cdot 0 \Rightarrow A = 3$$

• Για $x = 2$ στην σχέση (1), παίρνουμε:

$$2^2 + 2 \cdot 2 + 6 = A \cdot 0 + B(2-1)(2-4) + \Gamma \cdot 0 \Rightarrow B = -7$$

Για $x = 4$ στην σχέση (1), παίρνουμε:

$$4^2 + 4 \cdot 2 + 6 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma(4-1)(4-2) \Rightarrow \Gamma = 5$$

Έτσι η ανάλυση του κλάσματος έχει τη μορφή:

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4} \quad (2)$$

2ος τρόπος (εκ' ταυτότητας ίσα πολυώνυμα)

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$x^2 + 2x + 6 = A(x^2 - 6x + 8) + B(x^2 - 5x + 4) + \Gamma(x^2 - 3x + 2)$$

Κατατάσσουμε τους όρους με τον ίδιο βαθμό:

$$x^2 + 2x + 6 = x^2(A + B + \Gamma) + x(-6A - 5B - 3\Gamma) + (8A + 4B + 2\Gamma)$$

Η τελευταία σχέση για να ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$, πρέπει οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων να είναι ίσοι. Δηλαδή παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} A + B + \Gamma = 1 \\ -6A - 5B - 3\Gamma = 2 \\ 8A + 4B + 2\Gamma = 6 \end{array} \right\}$$

από το οποίο βρίσκουμε: $A = 3, B = -7, \Gamma = 5$

Συνεπώς για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx = 3 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= 3 \ln|x-1| - 7 \ln|x-2| + 5 \ln|x-4| + c = \ln \left| \frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + c \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+x-12} dx, \quad \text{όταν } x \neq 3, -4.$$

Λύση.

$$\frac{x+2}{x^2+x-12} = \frac{x+2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με τον παρονομαστή που αναλύεται, δηλαδή με $(x-3)(x+4)$, προκύπτει ότι

$$x+2 = A(x+4) + B(x-3). \quad (2)$$

Η (2) γράφεται

$$(A+B-1)x + 4A - 3B - 2 = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 1 \\ 4A - 3B & = & 2, \end{array} \quad \text{οπότε } A = \frac{5}{7} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{7}.$$

Τελικά σύμφωνα και με την (1) έχουμε

$$I = \frac{5}{7} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{2}{7} \int \frac{dx}{x+4} = \frac{5}{7} \ln|x-3| + \frac{2}{7} \ln|x+4| + c.$$

β) Αν ο παρανομαστής πλέον παραγοντοποιημένος έχει τη μορφή:

$$Q(x) = (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)^3$$

δηλαδή έχει και απλές και πολλαπλές ρίζες, τότε η ρητή συνάρτηση αναλύεται σε απλά κλάσματα, ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)^3} = \frac{A}{x - \rho_1} + \frac{B}{(x - \rho_2)^3} + \frac{\Gamma}{(x - \rho_2)^2} + \frac{\Delta}{x - \rho_2}$$

Υπογραμμίζουμε ότι ο παράγοντας που αφορά την πολλαπλή ρίζα θα αναλυθεί σε τόσα κλάσματα όση και η πολλαπλότητα (δύναμη) της ρίζας.

Τα A, B, Γ, Δ μπορούν να βρεθούν με τα εκ' ταυτότητας ίσα πολυώνυμα ή θέτοντας τιμές στο x .

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}, \quad \text{όταν } x \neq \pm 1.$$

Λύση.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

οπότε

$$1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1). \quad (3)$$

Η (3) γράφεται

$$(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C-1) = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + C &= 0 \\ A - B + C &= 1, \end{aligned} \quad \text{οπότε } A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \text{ και } C = \frac{1}{2}.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \overbrace{\int (x-1)'(x-1)^{-2} dx}^{\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c. \end{aligned}$$

γ) Αν ο παρανομαστής πλέον παραγοντοποιημένος έχει τη μορφή:

$$Q(x) = (x - \rho_1) \cdot (x^2 + p \cdot x + q), \text{ με } \Delta = p^2 - 4q < 0$$

δηλαδή έχει πραγματικές και απλές μιγαδικές ρίζες, τότε η ρητή συνάρτηση αναλύεται σε απλά κλάσματα, ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x^2 + px + q)} = \frac{A}{x - \rho_1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 + px + q}$$

Υπογραμμίζουμε ότι ο παράγοντας που αφορά τις μιγαδικές ρίζες θα έχει στον αριθμητή διώνυμο. Τα A, B, Γ μπορούν να βρεθούν με τα εκ' ταυτότητος ίσα πολυώνυμα ή θέτοντας τιμές στο x.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^5 - x^2}$

➤ Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων:

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)$$

Τότε:

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta x + E}{x^2 + x + 1} \quad (1)$$

Απαλοΐφουμε τους παρονομαστές:

$$1 = A(x-1)(x^2 + x + 1) + Bx(x-1)(x^2 + x + 1) + \Gamma x^2(x^2 + x + 1) + (\Delta x + E)x^2(x-1) \quad (2)$$

Για $x=0$ στην (2), παίρνουμε:

$$1 = A(0-1)(0+0+1) + B \cdot 0 + \Gamma \cdot 0 + (\Delta \cdot 0 + E)0 \Rightarrow A = -1$$

Για $x=1$ στην (2), παίρνουμε:

$$1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma(1+1+1) + (\Delta + E)0 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{3}$$

Κάνοντας πράξεις η σχέση (2) δίνει:

$$1 = A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + \Gamma(x^4 + x^3 + x^2) + \Delta(x^4 - x^3) + E(x^3 - x^2)$$

Για τον υπολογισμό των B, Δ, E παίρνουμε τους συντελεστές των x^4, x^3, x^2 και τους εξισώνουμε με το μηδέν, εφόσον στο πρώτο μέλος της ισότητας έχουμε σταθερό πολυώνυμο. Έτσι παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} B + \Gamma + \Delta = 0 \\ A + \Gamma - \Delta + E = 0 \\ \Gamma - E = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B + \Delta = -1/3 \\ -\Delta + E = 2/3 \\ E = 1/3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 0 \\ \Delta = -1/3 \\ E = 1/3 \end{array}$$

Επομένως

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2 + x + 1)}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = - \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx \end{aligned} \quad (3)$$

Το άγνωστο ολοκλήρωμα στη σχέση (3) υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x = t - \frac{1}{2}$ με $dx = dt$, οπότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{t-(1/2)-1}{(t-1/2)^2+(t-1/2)+1} dt = \int \frac{t-(3/2)}{t^2-t+(1/4)+t-(1/2)+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+(3/4)} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + c_1 = \\ &\stackrel{t=x+\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c_1 \end{aligned}$$

Τέλος το ζητούμενο ολοκλήρωμα από τη σχέση (3) και την προηγούμενη είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{x \, dx}{(x-1)(x^2+4)}, \quad \text{όταν } x \neq 1.$$

Λύση. Όμοια

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$$

οπότε

$$x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1). \quad (4)$$

Η (4) γράφεται

$$(A+B)x^2 + (-B+C-1)x + (4A-C) = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -B + C &= 1 \\ 4A - C &= 0, \end{aligned} \quad \text{οπότε } A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{5} \text{ και } C = \frac{4}{5}. \quad (5)$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \text{I} &= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5} \int \frac{x \, dx}{x^2+4} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \text{I}_1 + \text{I}_2 \end{aligned}$$

όπου

$$\text{I}_1 = \frac{1}{5} \int \frac{x \, dx}{x^2+4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{(x^2+4)}^{2x} \, dx}{x^2+4} = \frac{1}{10} \ln(x^2+4),$$

$$\text{I}_2 = \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{4}{5} \int \frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 2 \int \frac{\left(\frac{x}{2}\right)' \, dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Άρα

$$\text{I} = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{1}{10} \ln(x^2+4) + \frac{2}{5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

δ)

Μεταξύ των ριζών του παρονομαστή $Q(x)$ να υπάρχουν ρίζες μιγαδικές πολλαπλές. Για παράδειγμα αν έχουμε $Q(x) = (x^2 + px + q)^2$ με $\Delta = p^2 - 4q < 0$, τότε μπορούμε να το αναλύσουμε σ' απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2 + px + q}$$

Σημειώνουμε ότι ο τρόπος ανάλυσης σ' απλά κλάσματα είναι ίδιος με αυτόν των πραγματικών πολλαπλών ριζών (περίπτωση 2n) μόνο που εδώ έχουμε στον αριθμητή κάθε κλάσματος διώνυμο αντί της σταθερής.

Τα A, B, Γ, Δ υπολογίζονται από τα εκ' ταυτότητος ίσα πολυώνυμα.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

➤ Επειδή το $x^2 + 1$ είναι διπλός παράγοντας του παρονομαστή, έχουμε

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2 + 1}$$

Απαλοίφοντας τους παρονομαστές παίρνουμε:

$$x^3 - 2x = Ax + B + (\Gamma x + \Delta)(x^2 + 1)$$

οπότε:
$$x^3 - 2x = x^3\Gamma + x^2\Delta + x(A + \Gamma) + B + \Delta$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων του x :

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = 1 \\ \Delta = 0 \\ A + \Gamma = -2 \\ B + \Delta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Gamma = 1 \\ \Delta = 0 \\ A = -3 \\ B = 0 \end{array}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)' dx}{x^2 + 1} = +\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ
ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2^η

**Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΕΙΝΑΙ
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ Ή ΙΣΟΣ ΑΠΟ ΤΟ
ΒΑΘΜΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ**

Έστω ότι η ρητή συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού, έστω n και το $Q(x)$ βαθμού m .

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε εκτελούμε τη διαίρεση $P(x):Q(x)$. Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης, προκύπτει ότι:

$$P(x) = \Pi(x) Q(x) + U(x)$$

οπότε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{U(x)}{Q(x)}$$

όπου: $\Pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης

$U(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης και με βαθμό $U(x) < \text{βαθμό } Q(x)$

Συνεπώς για το ολοκλήρωμα θα έχουμε:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \Pi(x) dx + \int \frac{U(x)}{Q(x)} dx$$

Η ολοκλήρωση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\Pi(x)$ είναι πολύ εύκολη. Ενώ η ολοκλήρωση της ρητής συνάρτησης $U(x)/Q(x)$ με βαθμό παρονομαστή μεγαλύτερο του αριθμητή θα γίνει σύμφωνα με την μεθοδολογία που περιγράφουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx$$

✎ Ο βαθμός του αριθμητή (3ος) είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή (2ος), οπότε εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 5x + 7 & x^2 + 2 \\ x^3 & \\ \hline & -2x \\ & 3x^2 + 3x + 7 \\ & -3x^2 & -6 \\ \hline & 3x + 1 \end{array}$$

Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης παίρνουμε:

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = (x^2 + 2)(x + 3) + 3x + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} = x + 3 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2}$$

Απ' τον οποίο για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx = \int (x + 3) dx + \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(x / \sqrt{2}) + c \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4} dx, \quad \text{όταν } x \neq \pm 2.$$

Από τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x - 1}{x^2 - 4} = x + \frac{7}{4} \frac{1}{x - 2} + \frac{9}{4} \frac{1}{x + 2},$$

οπότε

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4} \ln |x - 2| + \frac{9}{4} \ln |x + 2| + c.$$