7.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα

Ορισμός

Ο αριθμός $\lambda \in R$ λέγεται **ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή** ενός $n \times n$ πίνακα Α, εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\overline{x} \in R^n$ με $\overline{x} \neq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{A\overline{x} = \lambda\overline{x}} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\boxed{(A - \lambda I)\overline{x} = 0} \qquad \textbf{(7.2)}$$

Τα διανύσματα $\overline{x}$ που ικανοποιούν το ομογενές σύστημα (7.2) λέγονται **ιδιοδιανύσματα ή χαρακτηριστικά διανύσματα**.

Το ομογενές σύστημα της σχέσης (7.2) έχει λύση εκτός της μηδενικής ($\overline{x} \neq 0$), όταν η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\boxed{|A - \lambda I| = 0} \qquad \textbf{(7.3)}$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές τιμές) ενός πίνακα Α θα βρεθούν από τη λύση της εξίσωσης (7.3)

Ορισμός

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i ενός $n \times n$ πίνακα Α το σύνολο των διανυσμάτων $\overline{x} \in R^n$ που ικανοποιούν την $(A - \lambda_i I)\overline{x} = 0$ λέγεται **ιδιόχωρος** και συμβολίζεται με E_{λ_i}

Δηλαδή:

$$E_{\lambda_i} = \left\{ \overline{x} \in R^n : (A - \lambda_i I)\overline{x} = 0 \right\}$$

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda_i I)\overline{x} = 0$ είναι υπόχωρος του R^n και η βάση του αποτελείται από τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ή χαρακτηριστικά διανύσματα της ιδιοτιμής λ_i.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές λ_i ενός πίνακα A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα κάνουμε τα εξής:

1ο. Επιλύουμε την εξίσωση $|A-\lambda I|=0$ και προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές λ_i.

2ο. Λύνουμε το σύστημα $(A-\lambda_i I)\overline{x}=0$ για κάθε μία ιδιοτιμή λ_i και προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα.