Αν $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n > 0$

Δείξτε ότι $\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot .... \cdot \alpha_n} \leq \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}{n}$ $\quad \forall n \geq 1$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$

<u>Απόδειξη</u>

Α΄ Τρόπος

Η σχέση που πρέπει να αποδείξω γίνεται:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2 \cdot .... \cdot \alpha_n}} \geq n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot .... \cdot \alpha_n}} + ... + \frac{\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot .... \cdot \alpha_n}} \geq n .$$

Όμως $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}} \cdot \dfrac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}} \cdot ... \cdot \dfrac{a_\nu}{\sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}} = 1$, οπότε η σχέση ισχύει από την άσκηση 1.18.

Β΄ Τρόπος

Θα χρησιμοποιηθεί η ανισότητα Jensen για τη λογαριθμική συνάρτηση.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με πλευρές *α, β, γ>0* και *α+β+γ=c* (άθροισμα ακμών σταθερό) ο κύβος έχει το μεγαλύτερο όγκο.

Έχουμε $V(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ με $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \dfrac{c}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$. Άρα $V(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \leq \dfrac{c^3}{27}$.

Δηλαδή κάθε ορθογώνιο με σταθερό άθροισμα ακμών (*α+β+γ=c*) έχει όγκο $V(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{c^3}{27}$. Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{c}{3}$, δηλαδή όταν το στερεό είναι κύβος.