Θέμα 1ο

(i)

(α)

Έχουμε,

$$N'(t) = r N(t)\left(1 - \frac{1}{k} N(t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = r N \left(1 - \frac{1}{k} N\right)$$

$$\Rightarrow dN = \frac{r}{k} N \cdot (k - N)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N \cdot (k - N)} dN = \frac{r}{k} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{N(k-N)} dN = \int \frac{r}{k} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{N(k-N)} dN = \frac{r}{k} t + c}$$

Ισχύει ότι,

$$\frac{1}{N(k-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{k-N}$$

$$\xRightarrow{\cdot N(k-N)} \quad 1 = A \cdot (k - N) + B \cdot N$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (B - A) N + A k$$

Από ισότητα πολυωνύμων:

$$\begin{cases} B - A = 0 \\ \underset{k>0}{\underline{Ak = 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{k} \\ A = \frac{1}{k} \end{cases}$$

Άρα,
$$\frac{1}{N(K-N)} = \frac{\frac{1}{K}}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{K-N}$$

άρα
$$\int \frac{1}{N(K-N)}\,dN = \frac{r}{K}t + c$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{\frac{1}{K}}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{K-N}\right)dN = \frac{r}{K}t + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K}\ln(N) - \frac{1}{K}\ln(K-N) = \frac{r}{K}t + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{K}\ln\left(\frac{N}{K-N}\right) = \frac{r}{K}t + c}$$

Ισχύει ότι $N(0) = N_0$.

Άρα, $\frac{1}{K}\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right) = c$, για $t=0$

Άρα, $\frac{1}{K}\ln\left(\frac{N}{K-N}\right) = \frac{r}{K}t + \frac{1}{K}\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)$

$$\overset{K>0}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{N}{K-N}\right) = rt + \ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{N}{K-N} = e^{\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)} \cdot e^{rt}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{K-N} = \frac{N_0}{K-N_0}e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad N\cdot(k-N_0) = (k-N)\, N_0 e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad N(k-N_0) = k\cdot N_0 e^{rt} - N\cdot N_0 e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad N\left(k-N_0+N_0 e^{rt}\right) = k\cdot N_0 e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad N\cdot\left[(e^{rt}-1)N_0+k\right] = k N_0 e^{rt}$$

$(e^{rt}-1)N_0+k \neq 0$
$\downarrow$
Διότι
$r>0$
$N_0>0$
$k>0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(t) = \frac{k N_0 e^{rt}}{(e^{rt}-1)N_0+k}}$$

(b)

Αφού $t \ll 1$, ισχύει ότι $e^{rt}-1 \simeq 0$, άρα

$$N(t) = \frac{k N_0 e^{rt}}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \ll 1 \text{ και } N_0 \ll k.}$$

(ii)

Ισχύει ότι:

- $|g(y_1)-g(y_2)| \leq k|y_1-y_2|$
- g συνεχής, αφού είναι Lipschitz

Άρα από το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των Picard-Lindelof, $\exists \delta>0$ και μία μοναδική συνάρτηση

$$y:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$$

παραγωγίσιμη, όπου ικανοποιεί:

(i) $y'=g(y)$

(ii) $y(0)=0$

Ισχύει ότι η g είναι περιττή, άρα $\forall x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ τ.ω. $g(-x)=-g(x)$.

Για $x=0$,

$$g(0)=-g(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(0)=0}$$

Επιλέγουμε για μοναδική λύση του ΠΑΤ την $y(x)=0,\ x\in(-\delta,\delta)$ και παρατηρούμε:

- $y'=g(y) \Leftrightarrow (0)'=g(0) \Leftrightarrow 0=0$, που ισχύει
- $y(0)=0$

Άρα η μηδενική λύση είναι και η μοναδική λύση.

(iii)

(a) Έχουμε,

$$y''(x)+w^2y(x)=0\ ,\ w>0$$

Θεωρούμε λύση της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$, άρα

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+w^2e^{\lambda x}=0$$

$$\overset{\cdot e^{-\lambda x}\neq 0}{\Longrightarrow}\ \lambda^2+w^2=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=wi \ \text{ ή } \ \lambda_2=-wi$$

Άρα,

$$y(x)=c_1\cdot\cos(wx)+c_2\sin(wx)$$

Ισχύει ότι,

$$y\left(x+\frac{2\pi}{w}\right)=c_1\cdot\cos\left(w\cdot\left(\frac{2\pi}{w}+x\right)\right)+c_2\sin\left(w\cdot\left(\frac{2\pi}{w}+x\right)\right)$$

$$=c_1\cdot\cos(wx+2\pi)+c_2\sin(\cdots)$$

$$=c_1\cdot\cos(wx)+c_2\cdot\sin(wx)$$

$$=y(x)$$

Άρα έχουμε περιοδικές λύσεις με περίοδο $T=\frac{2\pi}{w}$.

(b) Έχουμε,

$$y''(x)+y'(x)+w^2y(x)=0\ ,\ w>\frac{1}{2}$$

Θεωρούμε λύση της μορφής $y(x)=e^{\lambda x}$, τότε

$$\lambda^2e^{\lambda x}+\lambda e^{\lambda x}+w^2e^{\lambda x}=0$$

$$\overset{\cdot e^{-\lambda x}}{\Longrightarrow}\ \lambda^2+\lambda+w^2=0$$

$\Delta=1-4w^2<0$, διότι $w>\frac{1}{2}$.

Άρα, $\lambda_1=\frac{-1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2}$ ή $\lambda_2=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2}$

Άρα

$$y(x)=c_1\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{1-4w^2}}{2}x\right)+c_2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{1-4w^2}}{2}x\right)$$

Ισχύει ότι,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$, διότι

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{1-4w^2}}{2}x\right)=0$, μηδενική επί φραγμένη
- $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{1-4w^2}}{2}x\right)=0$, μηδενική επί φραγμένη.

Αν $0\leq w\leq\frac{1}{2}$, τότε $\Delta=1-4w^2\geq 0$, άρα

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2} \quad \text{και} \quad \lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2}$$

- $w=\frac{1}{2}$, τότε
$$y(x)=c_1\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

- $0\leq w<\frac{1}{2}$, τότε
$$y(x)=c_1\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2}\right)x}+c_2\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4w^2}\right)x}$$

Άρα για $0<w\leq\frac{1}{2}$, δεν είναι ταλαντώτερες και όχι περιοδικές και για μερικές αρχικές συνθήκες πηγαίνουν στο 0, όταν $x\to+\infty$ ενώ για άλλες απειρίζεται.

Προφανώς για $w=\frac{1}{2}$, πάντα μηδενίζεται όταν $x\to+\infty$.

(c)

Θεωρώντε $\mu = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$.

Θα κάνουμε μια γραμμική προσέγγιση του μ για $\omega >> 1$.

Η γραμμική προσέγγιση μιας f είναι:

$L(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)$, όπου η προσέγγιση γίνεται γύρω από το α.

Ισχύει ότι,

$$\sqrt{\alpha^2 + b} \approx \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\alpha^2}\right)$$

Άρα,

$$\mu = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}} \approx \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{\omega^2}\right)$$

$$\overset{\omega >> 1}{\underset{\omega \neq 0}{\Longrightarrow}} \frac{\mu}{\omega} \approx 1 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\mu}{\omega} \approx 1 - \frac{1}{8\omega^2}}$$

Θέμα 2ο

(i)

Σημεία Ισορροπίας

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow ty(1-y^2) - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y\cdot\left(t\cdot(1-y^2) - y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad -(t+1)y^2 = -t$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad y = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{t}{t+1}}$$

Άρα τα σ.ι. είναι:

$$y = 0 \quad \text{ή} \quad y = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{t}{t+1}}$$

(ii)

Θέτουμε $f_t(y) = ty(1-y^2) - y^3 = ty - (t+1)y^3$

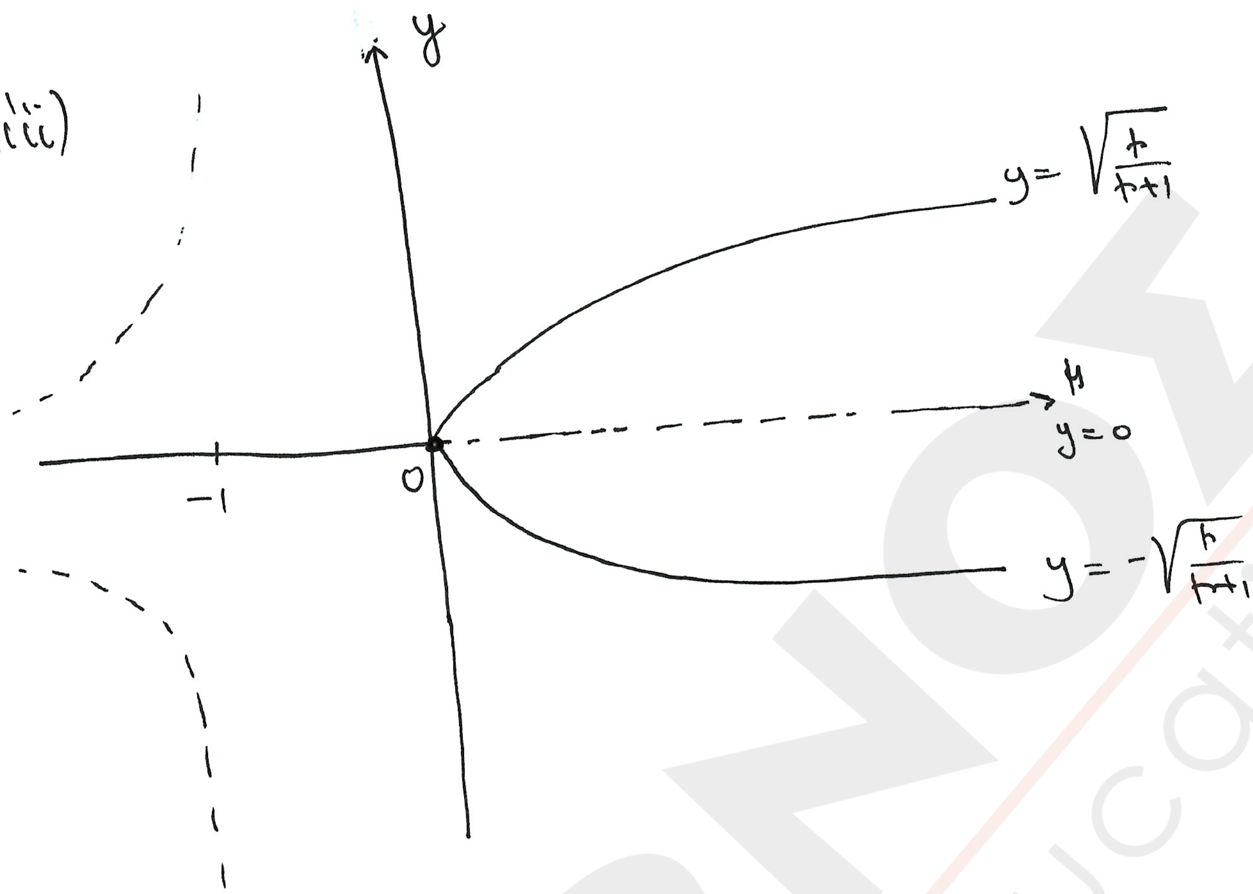
Ισχύει ότι

$$f_t'(y) = t - 3(t+1)y^2$$

- $f_t'(0) = t$
  - Αν $t>0$, τότε $y=0$ ασταθές
  - Αν $t<0$, τότε $y=0$ ευσταθές

- $f_t'\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right) = f_t'\left(-\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right) = t - 3\cancel{(t+1)}\cdot\frac{t}{\cancel{t+1}} = -2t$
  - Αν $t>0$, τότε τα $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$, $y = -\sqrt{\frac{t}{t+1}}$ ευσταθή
  - Αν $t<-1$, τότε τα $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$, $y = -\sqrt{\frac{t}{t+1}}$ ασταθή

(iii)



Τα σημεία διακλάδωσης είναι τα $\mu=0$ και $\mu=-1$.

Θέμα 3ο

(i)

Έχουμε

$$\begin{cases} w'(t) = -w(t), & t>0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

Ισχύει ότι,

$$w'(t) = -w(t)$$

$$\Rightarrow w'(t) + w(t) = 0$$

$$\xRightarrow{\cdot e^t} e^t w'(t) + e^t w(t) = 0$$

$$\Rightarrow (e^t w(t))' = 0$$

$$\Rightarrow e^t w(t) = c$$

$$\Rightarrow w(t) = ce^{-t}$$

Ισχύει ότι,

$$w(0) = w_0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = w_0}$$

Άρα,

$$w(t) = w_0 e^{-t}$$

Έστω $x(t)$ μία λύση του ΠΑΤ:

$$\begin{cases} w'(t) = -w(t), & t>0 \\ x(0) = x_0 \neq w_0. \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon e^{t_0}$ τ.ω. αν $|w_0 - x_0| < \delta$, τότε

$$|w(t) - x(t)| = |w_0 e^{-t} - x_0 e^{-t}| = |w_0 - x_0| e^{-t} < \delta \cdot e^{-t_0} = \varepsilon$$

Άρα η $w(t)$ είναι ευσταθής.

Ισχύει ότι,

$$\lim_{t\to+\infty} |w(t)-x(t)| = \lim_{t\to+\infty} |w_0-x_0| e^{-t} = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Άρα είναι και ασυμπτωτικά ευσταθής η $w(t)$.

(ii)
$$\begin{cases} x' = x(x^2+y^2) - x, \; t \geq 0 \\ y' = y(x^2+y^2) - y, \; t \geq 0 \end{cases}$$

Ισχύει ότι,

$$h(t) = \| w(t) - w_0(t) \| = \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$$

$$\Rightarrow h'(t) = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{x\left[x(x^2+y^2)-x\right]+y\left[y(x^2+y^2)-y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{x^2\cdot(x^2+y^2-1)+y^2(x^2+y^2-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow h' = (x^2+y^2-1)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow h' = (h^2-1)h$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = (h-1)(h+1)h$$

$$\overset{h\neq 0,\ h\neq 1,\ h\neq -1}{\Longrightarrow} \frac{1}{(h-1)(h+1)h}\,dh = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(h-1)(h+1)h}\,dh = \int dt$$

$$\Rightarrow \int\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h+1}\right)dh = t + c$$

$$\Rightarrow -\ln|h| + \frac{1}{2}\ln|h-1| + \frac{1}{2}\ln|h+1| = t + c$$

$$\overset{h>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}\ln|h^2-1| - \ln h = t + c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\sqrt{|h^2-1|}}{h} = t + c$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{|h^2-1|}}{h} = c\,e^{t}$$

$$\Rightarrow \frac{|h^2-1|}{h^2} = c\,e^{2t}$$

• <u>Για $h \in (0,1)$</u>:

$$\frac{1-h^2}{h^2} = ce^{2t}$$

$$\Rightarrow h^2 c e^{2t} = 1-h^2$$

$$\Rightarrow h^2(1+ce^{2t}) = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{1+ce^{2t}}}$$

· Για $h \in (1, +\infty)$

$$\frac{h^2-1}{h^2} = ce^{2t}$$

$$\Rightarrow h^2 - 1 = ce^{2t} \cdot h^2$$

$$\Rightarrow h^2(1 - ce^{2t}) = 1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{1-ce^{2t}}}$$

Για $c_1 = |c|$ έχουμε:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4e^{2t}}}$$

(iii)

Ισχύει ότι,

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4e^{2t}}} = 0$$

άρα η $W_0(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής

Θέμα 4ο

Έχουμε,

$$\begin{cases} x' = y, & t \geq 0 \\ y' = x, & t \geq 0 \end{cases}$$

(i)

Σημεία Ισορροπίας

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Άρα το σ.ι. είναι το $(0,0)$.

Ισχύει ότι,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = y' \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow x'' = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}}$$

Όμως,

$$y(t) = x'(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$$

Οπότε η γενική λύση είναι:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

Αντιμετωπίζετε τον σύστημα συνήθων διαφορικών με την βοήθεια πίνακα:

$$\vec{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \vec{X}(t)$$

<u>Ιδιοτιμές A</u>

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

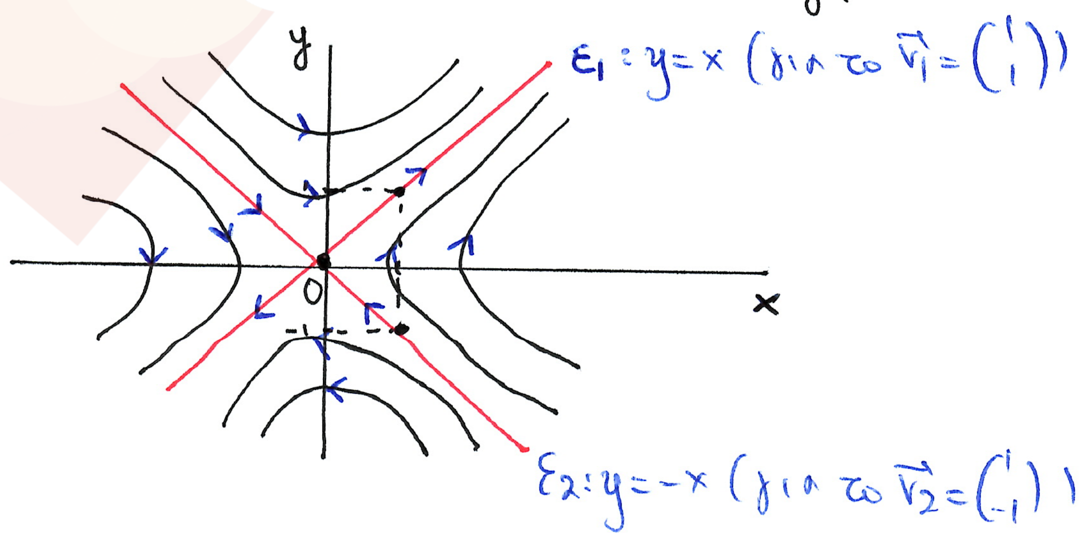
$$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ ή } \lambda_2 = -1$$

Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_2 = -1 \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Το $(0,0)$ είναι ασταθές σ.ι. και είναι σάγμα.



Το διάγραμμα φάσεων είναι το παραπάνω σχήμα, το παρατηρούμε από την γενική λύση:

$$x = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \quad (1)$$
$$y = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)+(2) \longrightarrow x+y = 2c_1 e^{t} \\ (1)-(2) \longrightarrow x-y = 2c_2 e^{-t} \end{array}\right\} (\cdot) \quad x^2 - y^2 = 4c_1 c_2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι:

$$x^2 - y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- για $c \neq 0$ έχουμε υπερβολές
- για $c = 0$ έχουμε τις δύο ευθείες $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$.

Θέμα 5ο

(i)
Έχουμε,

$$y' = -g(y),\ y \in \mathbb{R}$$

Το 0 είναι σ.ι. , διότι $g(0)=0$.
Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$V : (-a, a) \to \mathbb{R}^+$$

με $V(y) = y^2 \in C^1(-a,a)$.
Ισχύει ότι,

- $V(y) > 0,\ \forall y \in (-a,a) \setminus \{0\}$.
  $V(0) = 0$

- $\dfrac{dV}{dt} = 2y \cdot y' = 2y \cdot (-g(y)) = (-2) \cdot y\, g(y) < 0,\ \forall y \in (-a,a) \setminus \{0\}$.

Άρα η V είναι ~~συνάρτηση~~ αυστηρή συνάρτηση Lyapunov, άρα το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(ii)
(A) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\alpha \sin x_1 \end{cases},\ \alpha > 0$

Θεωρούμε,

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \alpha \sin y\, dy + \frac{1}{2} x_2^2$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$U(x) = \int_0^x \alpha \sin y\, dy, \quad x \text{ κοντά στο } 0$$

Ισχύει ότι $U'(0)=0$, άρα το $\overset{x=0}{}$ κρίσιμο σημείο.
Ισχύει ότι $U''(0)=\alpha>0$, άρα το $x=0$ είναι ελάχιστο, άρα:

$$U(x) \geq U(0) = 0 \Rightarrow \int_0^x \alpha \sin y\, dy \geq 0$$

Άρα

- $V(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \alpha \sin y\, dy + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$, $\forall (x_1,x_2)$ κοντά στο $(0,0)$
  $(x_1,x_2) \in B(0,1) \setminus (0,0)$

  Ανοικτή μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα 1

$$V(0,0) = 0$$

- $\dot V(x_1,x_2) = \alpha \cdot \sin x_1 \cdot x_1' + \frac{1}{2}\cdot 2x_2 \cdot x_2'$
  $= \alpha \cdot \sin x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot (-\alpha \sin x_1) = 0 \leq 0$, $(x_1,x_2) \in B(0,1)$

Άρα η V είναι συνάρτηση Lyapunov, άρα το $(0,0)$ είναι ευσταθές.

(B)

(B1) Θεωρούμε την συνάρτηση,

$$V(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \alpha \sin y\, dy + \frac{1}{2}x_2^2$$

Έχουμε ότι,

- $V(x_1,x_2) \geq 0$, $\forall (x_1,x_2) \in B(0,1) \setminus \{0,0\}$

  $V(0,0) = 0$
- $\dot{V}(x_1,x_2) = a \sin x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{2} x_2 \cdot (-a \sin x_1 - Bx_2) = -\frac{B}{2} x_2^2 \leq 0$, $\forall (x_1,x_2) \in B(0,1)$

Άρα είναι ευσταθές το $(0,0)$, λόγω συνάρτησης Lyapunov.

(B2)

Επιλέγουμε,

$$P_{22} = 1, \; P_{11} = \frac{B^2}{2}, \; P_{12} = \frac{B}{2}$$

Έχουμε,

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \int_0^{x_1} a \sin y \, dy \quad \text{με} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{2} & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- $V(x_1,x_2) > 0$, P θετικά ορισμένος και $\int_0^{x_1} \sin y \, dy > 0$ (για $(x_1,x_2) \in B(0,1) \setminus \{0,0\}$)

  $V(0,0) = 0$

- $\dot{V}(x_1,x_2) = -\frac{1}{2} a B x_1 \cdot \sin(x_1) - \frac{1}{2} B x_2^2 < 0$, $\forall (x_1,x_2) \in B(0,1)$

Άρα η $V(x_1,x_2)$ είναι αυστηρή συνάρτηση Lyapunov, άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Άρα καταλαβαίνουμε ότι η B1 μας έδειξε το $(0,0)$ ως ευσταθές ενώ η B2 ως ασυμπτωτικά ευσταθές, άρα οι συνθήκες του θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov είναι μόνο ικανές.