1.1 Πραγματικοί Αριθμοί – 1.2 Συναρτήσεις

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε συνάρτηση ;

Απάντηση

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το $\boldsymbol{A}$** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο του $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ερώτηση 2

Ποια μεταβλητή λέγεται εξαρτημένη και ποια ανεξάρτητη ;

Απάντηση

Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται ***ανεξάρτητη μεταβλητή***, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται ***εξαρτημένη μεταβλητή***.

ΣΧΟΛΙΟ

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το σύνηθες είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο. Υπάρχουν περιπτώσεις που την συμβολίζουμε με t ή με άλλο γράμμα.

Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε πεδίο ορισμού συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο A στο οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή x λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Ερώτηση 4

Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή :

$f(A) = \{y \,/\, y = f(x) \; για \; κάποιο \; x \; \in A\}$.

Ερώτηση 5

Τι εννοούμε όταν λέμε «η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο B» ;

Απάντηση

Όταν θα λέμε ότι «Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο B», θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι : $f(B) = \{y \,/\, y = f(x) \; για \; κάποιο \; x \in B\}$.

Ερώτηση 6

Με ποιες συναρτήσεις ασχολείται το φετινό βιβλίο ;

Απάντηση

Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Ερώτηση 7

Τι χρειάζεται για να οριστεί πλήρως μία συνάρτηση f;

Απάντηση

Για να οριστεί πλήρως μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της.
- Η τιμή της $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Ερώτηση 7

Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο . Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M\big(x, f(x)\big), x \in A$ λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

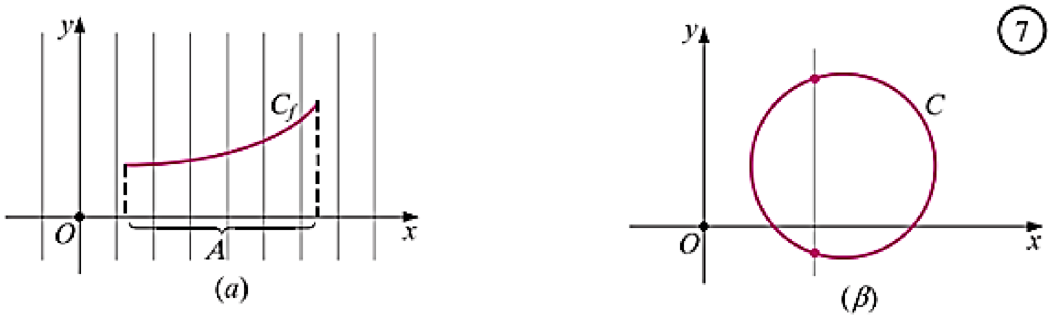
Ερώτηση 8

Πως διαπιστώνεται ότι η δοσμένη γραφική παράσταση είναι γραφική παράσταση συνάρτησης ;

Απάντηση

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. (Σχήμα 7α)

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης. (σχήμα 7β).

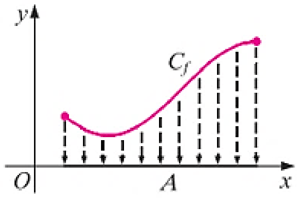


Ερώτηση 9

Στη γραφική παράσταση συνάρτησης που βρίσκεται το πεδίο ορισμού ;

Απάντηση

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.



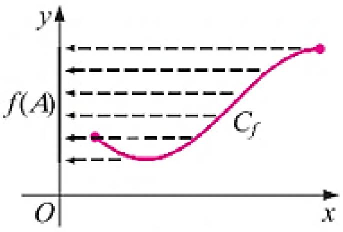
(α)

Ερώτηση 10

Στη γραφική παράσταση συνάρτησης που βρίσκεται το σύνολο τιμών;

Απάντηση

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f(A) των τεταγμένων των σημείων της C_f.



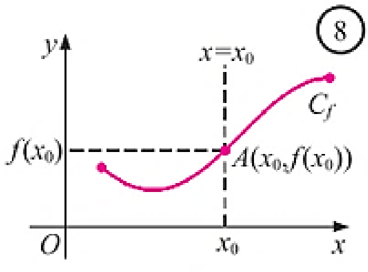
(β)

Ερώτηση 11

Η τιμή της f στο $x_o \in A$ ποια είναι ;

Απάντηση

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε η τιμή της f στο $x_o \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της $x = x_o$ και της C_f.



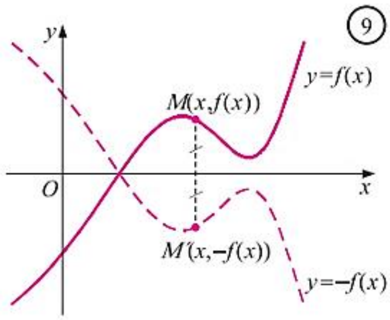
(γ)

Ερώτηση 12

Πώς προκύπτει η C_{-f} από τη γραφική παράσταση C_f;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M\big(x, f(x)\big)$, ως προς τον άξονα $x'x$.

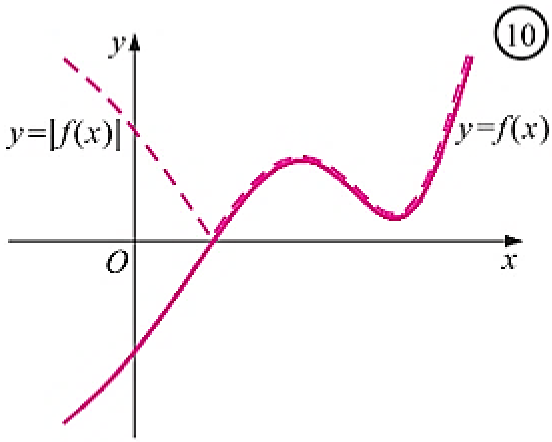


Ερώτηση 13

Πώς προκύπτει η $C_{|f|}$ από τη γραφική παράσταση C_f;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



ΣΧΟΛΙΟ

Μια πιο ακριβής διατύπωση για την γραφική παράσταση της $|f|$ είναι η εξής:

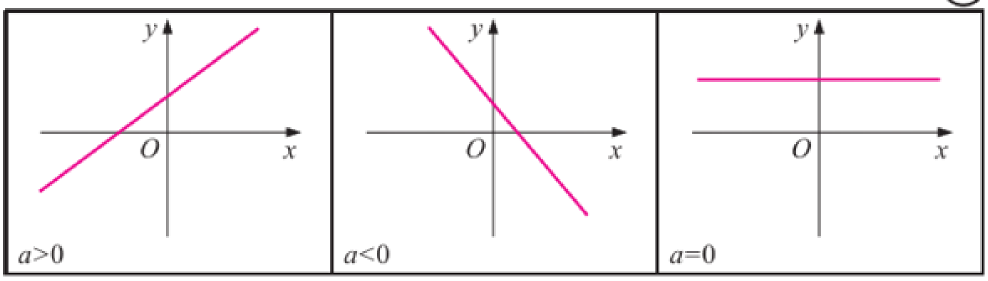
Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από αυτόν καθώς και από τα τμήματα που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$.

Ερώτηση 14

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x + \beta$;

Απάντηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$. 11



Είναι ευθεία γραμμή.

Αν ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ είναι οξεία (σχήμα 11α), αν είναι αρνητικός η γωνία είναι αμβλεία (σχήμα 11β) και αν είναι μηδέν και η γωνία θα είναι μηδέν οπότε η ευθεία είναι παράλληλη στον $x'x$ (σχήμα 11γ).

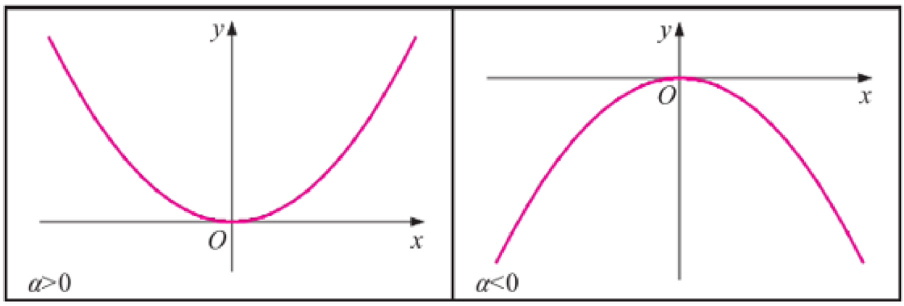
Αν $\beta = 0$, η ευθεία είναι της μορφής $y = \alpha x$ που είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ερώτηση 15

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2$;

Απάντηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.



12

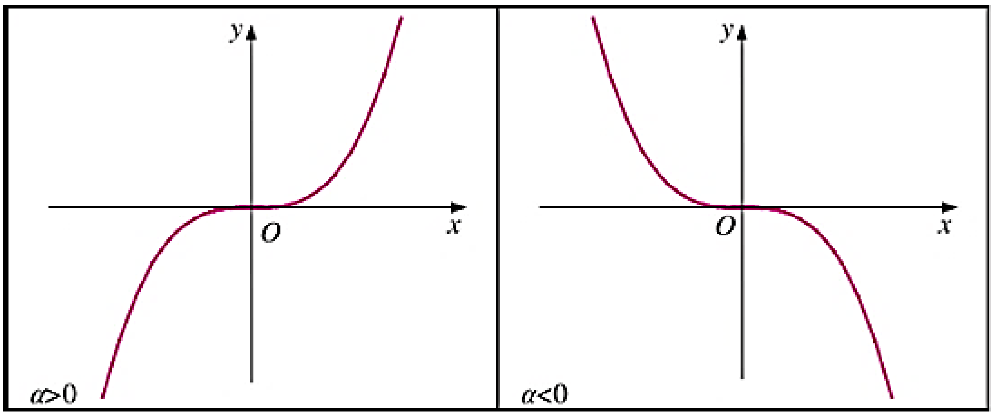
Είναι παραβολή.

Ερώτηση 16

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^3$;

Απάντηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



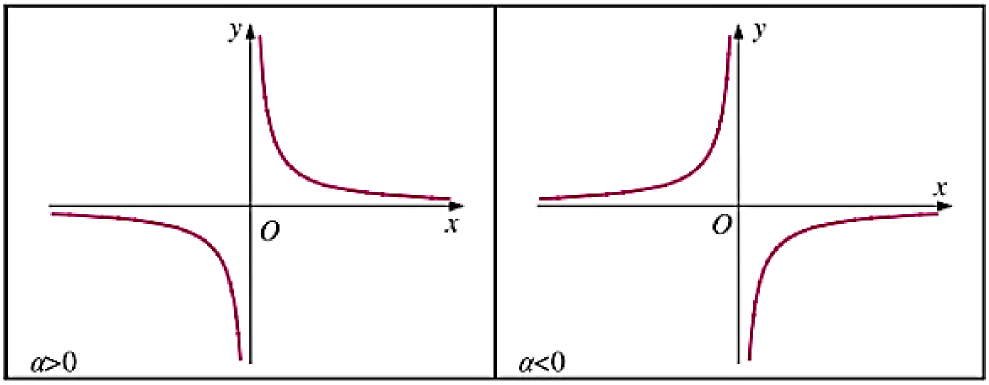
13

Ερώτηση 17

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\alpha}{x}$;

Απάντηση

Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.



14

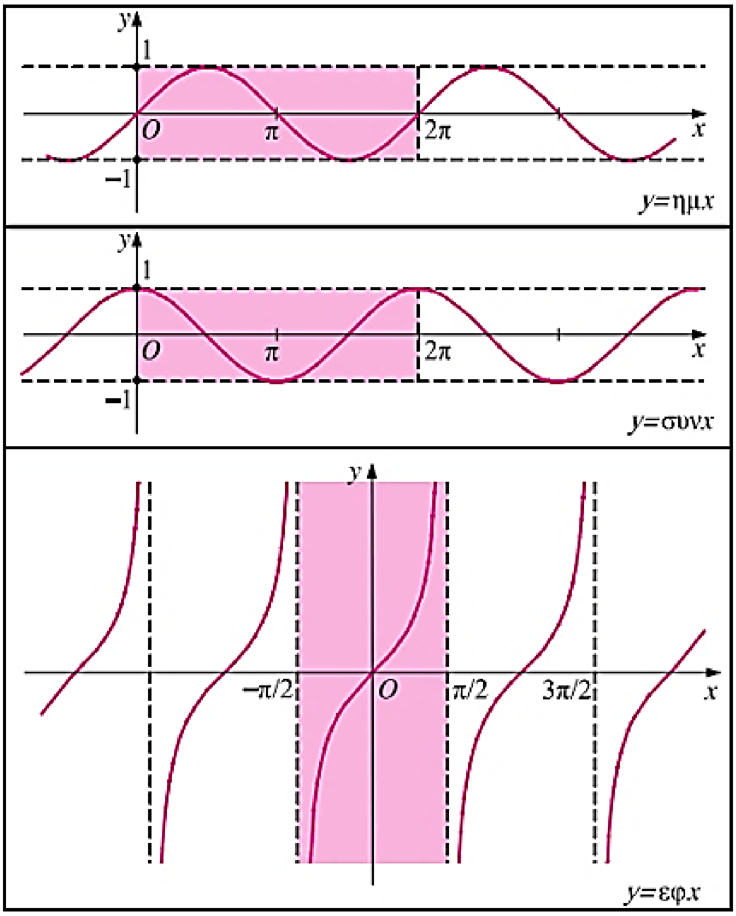
Ερώτηση 18

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση των $f(x) = ημx, f(x) = συνx, f(x) = εφx$;

Απάντηση

Οι τριγωνικές συναρτήσεις: $f(x)$ = ημx, $f(x)$ = συνx, $f(x)$ = εφx.

16



(α)

(β)

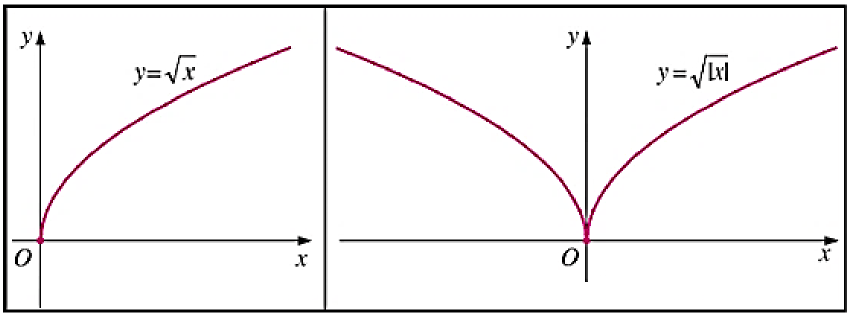
(γ)

Ερώτηση 19

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{|x|}$;

Απάντηση

Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{|x|}$.



15

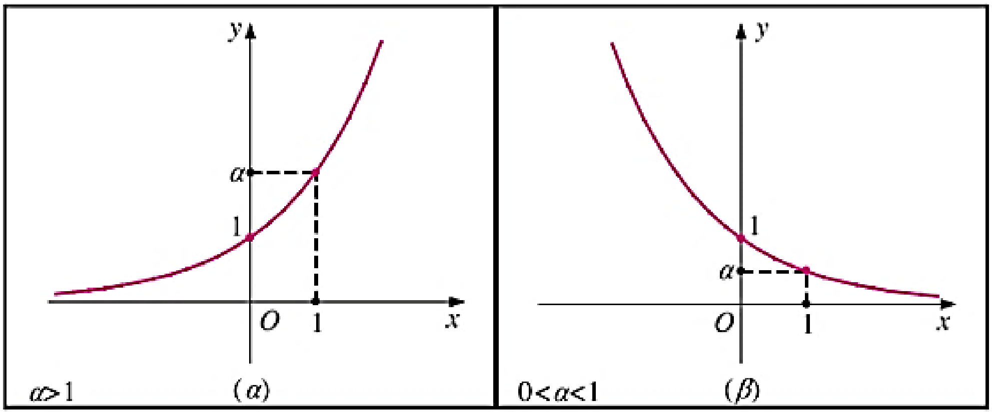
Επειδή $g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται από δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

Ερώτηση 20

Τι γνωρίζετε για την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, 0<\alpha\neq 1$;

Απάντηση

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



17

Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
ενώ
αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

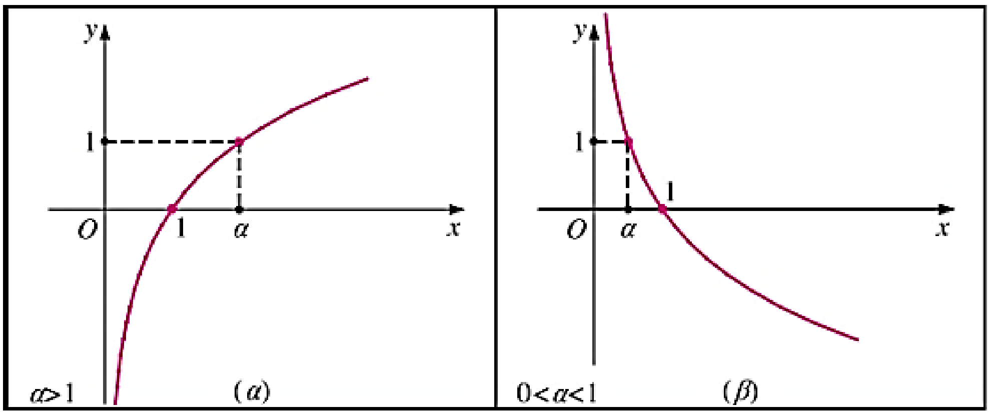
Ερώτηση 21

Τι γνωρίζετε για την λογαριθμική συνάρτηση

$f(x) = \log_{\alpha} x,\ 0 < a \neq 1$;

Απάντηση

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$, $0 < \alpha \neq 1$.



18

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha(x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = k\log_\alpha x_1$

7) αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

Ερώτηση 22

Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες** (και γράφουμε $f = g$) όταν :

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν σε μια συνάρτηση **αλλάξουμε το σύμβολο** της μεταβλητής, η συνάρτηση **δεν αλλάζει.**

Για παράδειγμα αν:

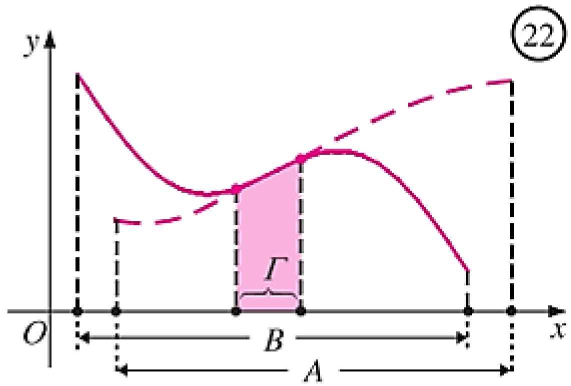
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(t) = t^2$

οι συναρτήσεις είναι ίσες . Δηλαδή $f = g$.

Είναι φανερό, γιατί και οι δύο συναρτήσεις, σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχούν το τετράγωνό του.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A, B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο σύνολο Γ. ($\sigma\chi\eta\mu\alpha$ 22)



Ερώτηση 23

Πώς ορίζεται το άθροισμα δύο συναρτήσεων f, g , η διαφορά τους, το γινόμενό τους και το πηλίκο τους ;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g, f-g, fg$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A, B των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο :

$$\{x \,/\, x \in A \;και\; x \in B, με\; g(x) \neq 0\}$$

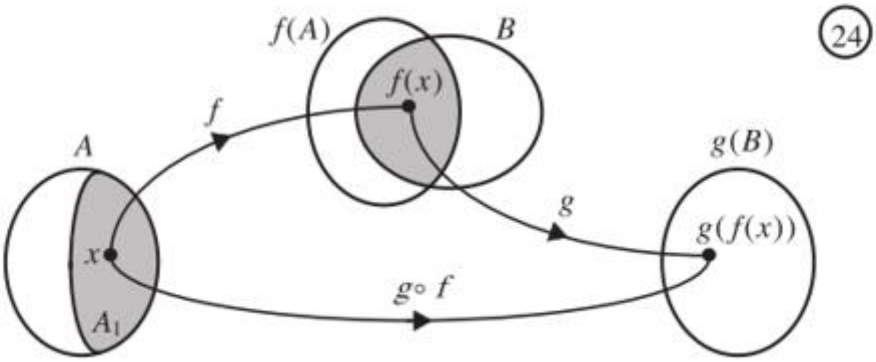
Ερώτηση 24

Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με

$g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.



Το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{g \circ f}$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή, είναι το σύνολο :

$$\boldsymbol{A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}}$$

Σχόλιο 1

Πότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$:

Απάντηση

Η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Έστω $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

1η περίπτωση : $f(A) \subseteq B$.

Τότε : $f(A) \cap B = f(A)$ και η σύνθεση ορίζεται : $g \circ f: A \to \mathbb{R}$.

2η περίπτωση : $f(A) \nsubseteq B$

Βρίσκουμε τα $x \in A$ με $f(x) \in B$.

Δηλαδή $A_1 = \{x / x \in A \ \ \kappa\alpha\iota\ f(x) \in B\}$.

Τότε η σύνθεση ορίζεται : $g \circ f: A_1 \to \mathbb{R}$

Σχόλιο 2

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων ;

Απάντηση

Αν ορίζονται οι $f \circ g,\ \ g \circ f$ τότε δεν ισχύει πάντα $\mathrm{f} \circ g = g \circ f$.

Αντιπαράδειγμα :

Έστω οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x + 1$. Είναι :

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ και $D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$ οπότε ορίζονται οι $f \circ g,\ \ g \circ f$.

Είναι : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = 2x^2 + 1,$ ενώ :

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 \ \neq (g \circ f)(x)$

Σχόλιο 3

Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων ;

Απάντηση

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των $f, g\ και\ h$ και τη συμβολίζουμε με $\mathrm{h}\circ g \circ f$.

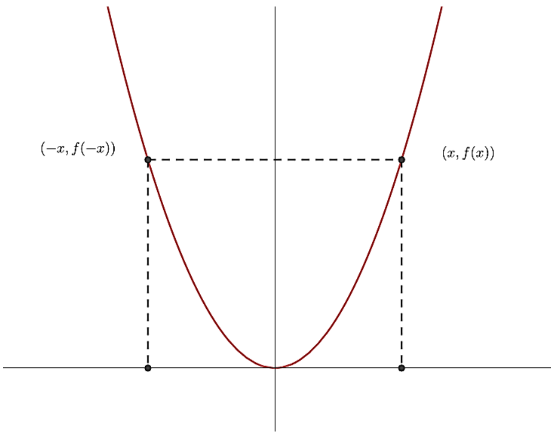
Συμπληρωματική Θεωρία από προηγούμενες τάξεις

Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Αν $x \in A$ τότε $-x \in A$.

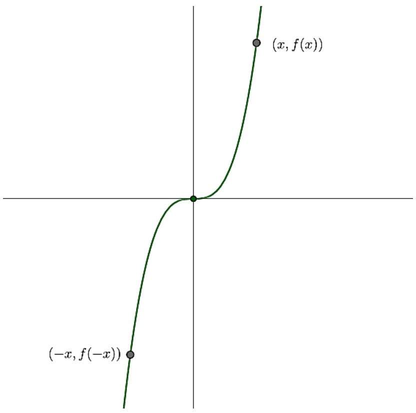
1. Μια $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** αν για $x \in A$, $f(x) = f(-x)$

   Η **γραφική παράσταση** της C_f είναι **συμμετρική** ως προς τον $y'y$ άξονα
   Παράδειγμα: $f(x) = x^2$



2. Μια $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή** αν για $x \in A$, $f(-x) = -f(x)$

   Η **γραφική παράσταση** της C_f είναι **συμμετρική** ως προς το σημείο $(0,0)$
   Παράδειγμα: $f(x) = x^3$



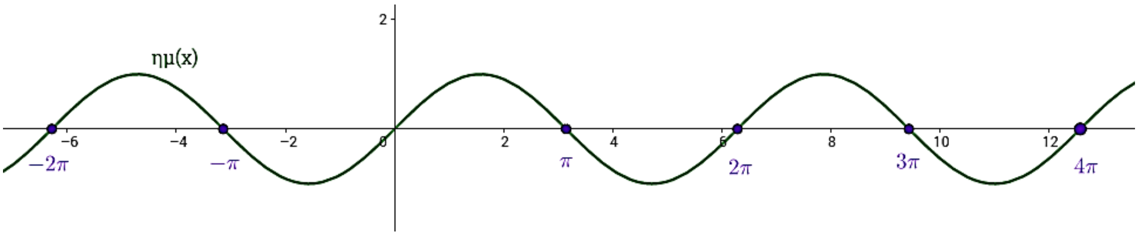
Περιοδικές συναρτήσεις

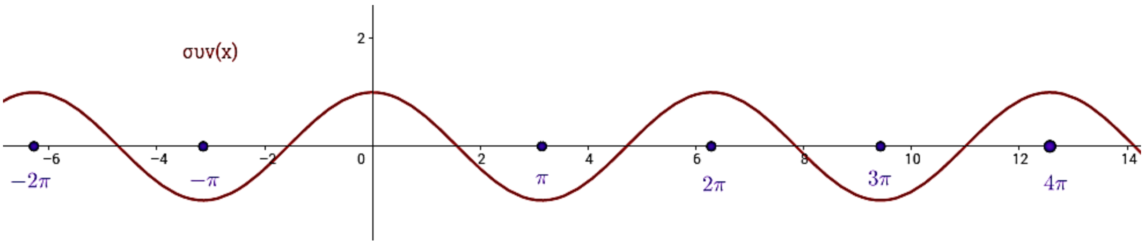
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $T > 0$ με την ιδιότητα:

1. Αν $x \in A$ τότε $x + T \in A$
2. Για $x \in A$, $f(x + T) = f(x)$

η συνάρτηση λέγεται **περιοδική με περίοδο Τ.**

Οι $ημx, συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.





Ενώ η $εφ : \mathbb{R} - \left\{κπ + \frac{π}{2} : κ \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο π