

## 1.1 Πραγματικοί Αριθμοί – 1.2 Συναρτήσεις

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΒΑΘΥΝΣΗΣ

#### Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

- i.  $|x| + |y| = |x + y| \Leftrightarrow xy \geq 0$
- ii.  $|x| + |y| = |x - y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

#### Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  για  $\alpha > 0$

#### Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$  για  $x, y > 0$

#### Άσκηση 4

Δείξτε ότι για  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\left| \frac{e^x - 1}{e^{x+1}} \right| < 1$

#### Άσκηση 5

Δείξτε ότι για  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

#### Άσκηση 6

Να δείξετε ότι

- i.  $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$
- ii.  $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \geq \frac{1}{2}$
- iii.  $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{2}$

### Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι:

- i.  $x^2 + x + 1 > 0$
- ii.  $x^2 - x + 1 > 0$
- iii.  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$
- iv.  $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$

### Άσκηση 8

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x + 2}$$

$$g(x) = \frac{4}{x^2 + 4} + \frac{x}{x^3 - 6x + 5}$$

$$h(x) = \frac{x}{2\sin x - 1}$$

$$k(x) = \frac{5}{2\eta\mu x + 3}$$

$$l(x) = \frac{4}{\ln(x - 1) - 1}$$

### Άσκηση 9

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$$

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

### Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(3 - 2e^x)$ .

- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .
- ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .

### Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x + 2$  και η ευθεία  $\varepsilon: 6x - y - 4 = 0$ .

- i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την  $\varepsilon$ .
- ii. Να βρείτε τη σχετική θέση της  $C_f$  με την  $\varepsilon$ .

### Άσκηση 12

Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις είναι  $f = g$ . Στις περιπτώσεις

$f \neq g$  να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

$$f(x) = \frac{e^{2x} - xe^x}{xe^x} \text{ και } g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - |x|} \text{ και } g(x) = 1 + \frac{1}{|x|}$$

$$f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x + 2}} \text{ και } g(x) = \sqrt{x} - 2$$

### Άσκηση 13

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$  και  $g(x) = \sqrt{1-e^x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις :

a)  $f - g$       b)  $f \cdot g$       c)  $\frac{1}{f}$       d)  $g^2 - \frac{1}{f}$

### Άσκηση 14

Δίνεται η  $f: \mathbb{R} - \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$

- Βρείτε ποια σχέση πρέπει να ισχύει για να ορίζεται η  $f \circ f: \mathbb{R} - \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$
- Δείξτε ότι αν η  $f \circ f: \mathbb{R} - \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται τότε  $f(f(x)) = x$  για  $x \neq \alpha$

### Άσκηση 15

Δίνονται  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = x^3$  και  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Να βρείτε τις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ .

### Άσκηση 16

Έστω  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  και μία  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $g \circ f(x) = |\sin x|$

- Βρείτε μια  $f$  που ικανοποιεί τα παραπάνω
- Πόσες τέτοιες  $f$  υπάρχουν;

### Άσκηση 17

Δίνονται  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   $f(f(x)) = g(x)$ .

Δείξτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .

### Άσκηση 18

Δίνεται  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2x + 1$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ . Αν  $f \circ g = g \circ f$ , να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta, \gamma$ .

### Άσκηση 19

Έστω  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = 2x - 1$ . Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$f(g(x)) = e^{x+1} + \ln(x^2 + 1)$ . Να βρείτε το  $f(x)$ .

### Άσκηση 20

Ορίζουμε την  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- i. Να αποδείξετε ότι  $|x| = x \cdot g(x)$
- ii. Για  $x, y \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι  $g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y)$