Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο</u>

1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις:

$(m+n)(m^2-mn+n^2)$	Α		1	$(m+n)^2$
$(m+n)(m-n)$	Β		2	$m^2-2mn+n^2$
$m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$	Γ		3	$(m+n)^3$
$m^2+2mn+n^2$	Δ		4	$(m-n)(m^2+mn+n^2)$
	●		5	$(m-n)^3$
	●		6	m^2-n^2
	●		7	m^3+n^3

Απάντηση

Πρόκειται για βασικές ταυτότητες (βλέπε θεωρία)

$\text{Α} \rightarrow 7$

$\text{Β} \rightarrow 6$

$\Gamma \rightarrow 3$

$\Delta \rightarrow 1$

2. Να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις:

$4\alpha^2\beta^2-4$	Α		1	$(\alpha^2+2\beta)^2$
$\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+4\beta^2$	Β		2	$(\alpha+\beta)^3$
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	Γ		3	$3(\alpha-\beta)$
$4(\alpha-\beta)-\alpha+\beta$	Δ		4	$4(\alpha\beta+1)\cdot(\alpha\beta-1)$

Απάντηση

Πρόκειται για βασικές ταυτότητες (βλέπε θεωρία)

$4\alpha^2\beta^2-4=4(\alpha\beta)^2-4=4\left[(\alpha\beta)^2-1\right]=4(\alpha\beta-1)(\alpha\beta+1)$ Α → 4

$\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+4\beta^2=(\alpha^2+2\beta)^2$ Β → 1

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$ (Πρόκειται για βασική ταυτότητα) Γ → 2

$4(\alpha-\beta)-\alpha+\beta=4(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=3(\alpha-\beta)$, Δ → 3

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $9x^2a^3-18a^5x^2-36xa^2$

Β) $9x^2-9y^2-10xy^2+10x^2y$

Γ) $8xy^3-24y^2-7axy+21a$

Δ) $a^3+6a^2+12a+8$

Ε) $16a^5-a$

ΣΤ) $a^3x+27y-a^3y-27x$

Λύση

Α) $9x^2a^3-18a^5x^2-36xa^2=9xa^2\left(ax-2a^3x-4\right)$

Β) $9x^2-9y^2-10xy^2+10x^2y=9\left(x^2-y^2\right)-10xy\left(y-x\right)=$

$9\left(x-y\right)\left(x+y\right)+10xy\left(x-y\right)=\left(x-y\right)\left[9\left(x+y\right)+10xy\right]$

Γ) $8xy^3-24y^2-7axy+21a=8y^2\left(xy-3\right)-7a\left(xy-3\right)=$

$=\left(xy-3\right)\left(8y^2-7a\right)$

Δ) $a^3+6a^2+12a+8=a^3+3a^2 2+3a2^2+2^3=\left(a+2\right)^3$

Ε) $16a^5-a=a\left(16a^4-1\right)=a\left(\left(4a^2\right)^2-1\right)=a\left(4a^2-1\right)\left(4a^2+1\right)$

$=a\left(4a^2-1\right)\left(4a^2+1\right)=a\left(2a-1\right)\left(2a+1\right)\left(4a^2+1\right)$

ΣΤ) $a^3x+27y-a^3y-27x=a^3\left(x-y\right)-27\left(x-y\right)$

$=\left(x-y\right)\left(a^3-27\right)=\left(x-y\right)\left(a^3-3^3\right)=\left(x-y\right)\left(a-3\right)\left(a^2+3a+9\right)$

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

4. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$x^3-9x^2+8x$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3+8x=9x^2$

Λύση

α)

$$x^3-9x^2+8x=x\left(x^2-9x+8\right)=x\left(x^2-x-8x+8\right)$$

$$x\left(x^2-x-8x+8\right)=x\left(x\left(x-1\right)-8\left(x-1\right)\right)=x\left(x-1\right)\left(x-8\right)$$

β) Αν $a\cdot b\cdot c=0$ τότε $a=0$ ή $b=0$ ή $c=0$

$$x^3+8x=9x^2 \Leftrightarrow x^3+8x-9x^2=0$$

Άρα με βάση το α) έχουμε

$$x^3+8x-9x^2=0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x-8\right)=0$$

οπότε $x=0$ ή $\left(x-1\right)=0$ ή $\left(x-8\right)=0$

Άρα $x=0$ ή $x=1$ ή $x=8$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις.

A) $3a^3-27a=0$

B) $x^3=x$

Γ) $3\left(x^2-1\right)=5(x+1)$

Λύση

Στηριζόμαστε στην ιδέα της λύσης της 4β)

Έτσι πρώτα παραγοντοποιούμε και μετά λύνουμε τις εξισώσεις

A) $3a^3-27a=0 \Leftrightarrow 3a\left(a^2-9\right)=0 \Leftrightarrow 3a(a-3)(a+3)=0$

οπότε

$3a=0$ ή $\left(a-3\right)=0$ ή $\left(a+3\right)=0$

Άρα

$a=0$ ή $a=3$ ή $a=-3$

Β) $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

Οπότε $x = 0$ ή $(x-1) = 0$ ή $(x+1) = 0$

Άρα $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Γ) $3\left(x^2 - 1\right) = 5(x+1) \Leftrightarrow 3\left(x^2 - 1\right) - 5(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) - 5(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\big(3(x-1) - 5\big) = 0$

οπότε $(x+1) = 0$ ή $3(x-1) - 5 = 0$

Άρα $x = -1$ ή $3x - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

6. Δίνεται η παράσταση

$A = xy^4 + x^4y$

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α

β. Αν $x + y = 4$ **και** $xy = 2$

Να βρείτε την τιμή

Ι) της παράστασης $x^2 + y^2$

ΙΙ) της παράστασης Α

Λύση

α.

$$A = xy^4 + x^4y = xy\left(x^3 + y^3\right) = xy(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

β. Ι) $x + y = 4$ άρα $(x+y)^2 = 16$

επομένως $x^2+2xy+y^2=16$ επειδή $xy=2$

έχουμε $x^2+2\cdot 2+y^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2=12$

II) $A=xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)=2\cdot 4\cdot(12+2)=112$

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείστε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

ΑΡΝΟΣ Online Education ...Πράξεις Παιδείας!