Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΕΡΟΣ Β - ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)**

α. Μια συνάρτηση άρτια μπορεί να είναι «1-1»

β. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιττή περνά από το (0,0)

γ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, τότε είναι πάντα «1-1»

δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

ε. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε η $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα

ζ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι «1-1», τότε η $f\circ g$ είναι «1-1»

η. Ισχύει ότι $f^{-1}(x)= f(x)^{-1}$

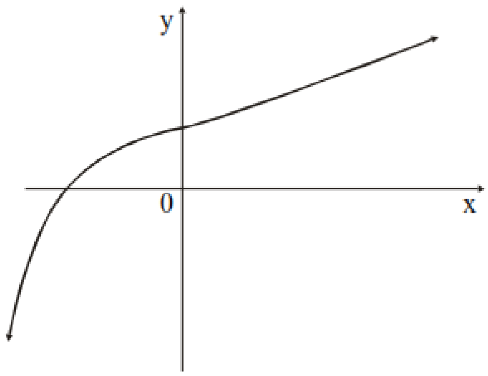
θ. Ισχύει ότι $f\circ g^{-1}(\chi)=f^{-1}\circ g^{-1}(\chi)$;

ι. Αν $f(\chi)=\psi$ και η f είναι «1-1», τότε είναι $\chi=f^{-1}(\psi)$

κ. Αν ισχύει ότι $f^{-1}(5)=2014$, τότε το $f(2014)=5$;

2. **Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

α) Η γραφική παράσταση C μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f στο R, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει



Α. δύο τουλάχιστον ρίζες

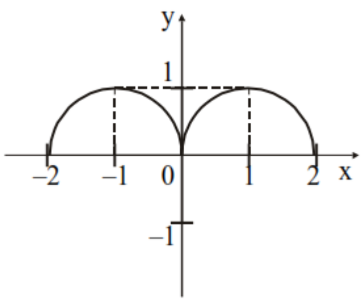
Β. μία μόνο ρίζα **Γ.** καμία ρίζα

Δ. περισσότερες από δύο ρίζες

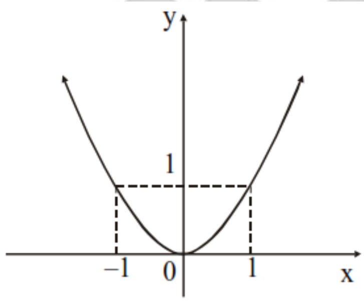
Ε. μία ρίζα θετική

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφική παράσταση συνάρτησης 1 - 1;

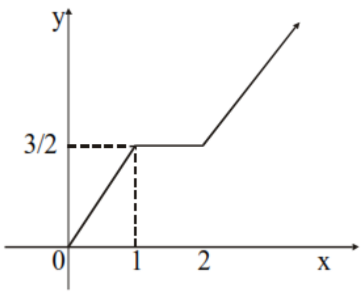
Α.



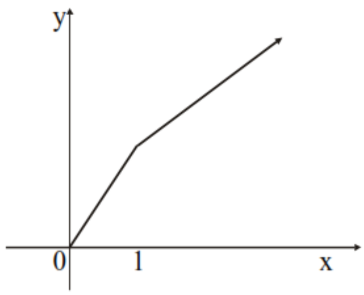
Β.



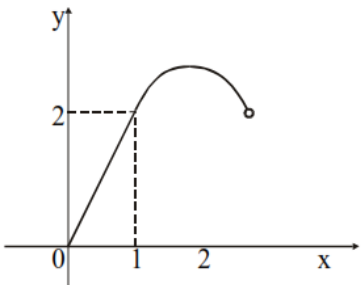
Γ.



Δ.



Ε.



γ) Έστω f μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές

Α. ως προς την ευθεία y = x **Β.** ως προς την ευθεία y = - x

Γ. ως προς τον άξονα y΄y **Δ.** ως προς την αρχή των αξόνων

Ε. ως προς τον άξονα x΄x

δ) Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την

Α. $g(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ **Β.** $h(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$ **Γ.** $\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln x$

Δ. $\sigma(x) = \sqrt{\ln x}$ **Ε.** $t(x) = \ln(2 - x)$

ε) Από τις παρακάτω συναρτήσεις **δεν** έχει αντίστροφη συνάρτηση η

Α. $y = ημx,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **Β.** $y = x^3 + 1$ **Γ.** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

Δ. $y = \frac{2}{3}e^x$ **Ε.** $y = \ln(x - 3),\ x > 3$

ζ) Δίνεται η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R, η οποία είναι 1 - 1. Τότε η εξίσωση $f(e^{x-1}) = f\ \ e$

Α. είναι αδύνατη στο R **Β.** έχει μοναδική λύση τον αριθμό e

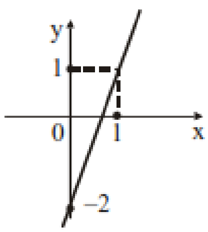
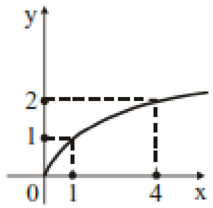
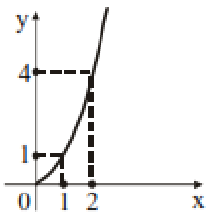
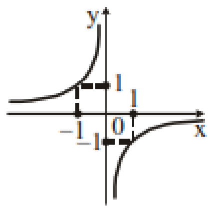
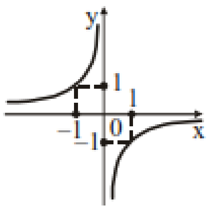
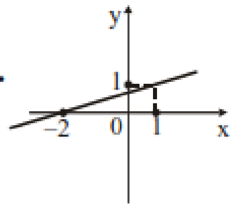
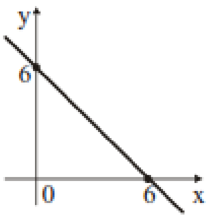
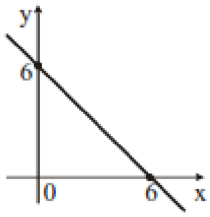
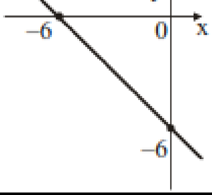
Γ. έχει μοναδική λύση τον αριθμό 1 **Δ.** έχει λύσεις τους αριθμούς 0 και 1

Ε. έχει μοναδική λύση τον αριθμό 2

η) Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f, τότε η g (f (x)), όπου ορίζεται, είναι ίση με

Α. 1 **Β.** g (x) ·f (x) **Γ.** $\frac{1}{x}$ **Δ.** x **Ε.** - x

3. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της από τη στήλη Β του πίνακα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** 
2. 	**β.** 
3. 	**γ.** 
4. 	**δ.** 
	ε. 

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

4. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x)=3x^2+1\,/\,\mathbb{R}$ είναι «1-1».

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $g(x)=3x^2+1\,/\ \ 3,10$ είναι «1-1».

5. Αν $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\,/\,A=\ 2,3$, να βρείτε το $f\ \ A$

6. Αν η συνάρτηση $f\ /\ A$ έχει τύπο: $f(x)=\dfrac{2x-1}{5}$ με $A=\left[\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\quad \mathbf{4}\right]$,

να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x)=f(x)$

7. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$ ανήκουν στην καμπύλη C_f, τότε να λυθεί η εξίσωση:

$$f\ \ 2+f^{-1}\ \ \chi^2+\chi\ \ \ =9$$

και η ανίσωση:

$$f\ \ f^{-1}\ \ \chi^2-8\chi\ \ -2\ \ <2$$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

8. Δίνεται η συνάρτηση $g:\ g(\chi)=\chi+\chi^3+\alpha^\chi\,/\,A=\Re$, όπου $\alpha>1$. Να βρεθούν:

α. Η μονοτονία της συνάρτησης

β. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\alpha^{\chi+1}-\alpha^{2\chi-3}+\ \ \chi+1\ \ -\ \ 2\chi-3\ \ =\ \ 2\chi-3\ ^3-\ \ \chi+1\ ^3$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{2\cdot 10^x+10^{2x}}{1+10^x},\ x\in\Re}$ και $\boldsymbol{g(x)=\dfrac{10^x}{1+10^x},\ x\in\Re}$

α) Να δείξετε ότι η $\boldsymbol{g(x)}$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντιστροφή της

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $\boldsymbol{h(x)=fog^{-1}(x)}$

10. Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f:\Re\to\Re}$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{fof\ \ (x)=x^2-3x+4}$. Να δείξετε ότι **f(2) = 2**

11. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathfrak{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x+2$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Να δείξετε ότι:

i. Η f ***ειναι*** $\mathbf{1-1}$ ***και*** $f^{-1}(x) = f(x) - 2$, για κάθε $x \in R$

ii. $f(f(f(x))) = f(x)+2$ ***και*** $f(x+2) = f(x)+2$

iii. δεν υπάρχει $\alpha \in \mathfrak{R} : f(\alpha) = \alpha$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x), x \in \mathfrak{R}$ με την ιδιότητα $(fof)(x) = -x \Leftrightarrow f(f(x)) = -x$. Να δείξετε ότι:

i. Η f είναι 1-1
ii. Η f δεν είναι γνησίως αύξουσα
iii. Η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
iv. Η f είναι περιττή

13. Έστω η συνάρτηση: $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathfrak{R}$. Να δείξετε ότι :

i. $f(1) = 1$

ii. Η $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν είναι 1-1

14. Έστω η συνάρτηση $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ τέτοια ώστε $(fof)(x) = x + f(x)$. Να δείξετε ότι

i. Η f είναι 1-1
ii. Η f(0) = 0
iii. Αν $f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ τότε $f(f(x) - x) = x$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

15. α) Αν οι συναρτήσεις $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ και $g : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ είναι 1-1 να δείξετε ότι και η fog είναι 1-1

β) Αν η συνάρτηση $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ είναι 1-1 να δείξετε ότι και η συνάρτηση $F(x) = (f(x))^3 + 2f(x) - 3$ είναι 1-1