Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.10. Πράξεις ρητών αλγεβρικών παραστάσεων

Β. Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες όχι;

α) $\frac{2}{x-2}-\frac{x}{x-2}=-1$

β) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{x+y}$

γ) $1+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$

δ) $\frac{x^2-3x+1}{x}=x-3+\frac{1}{x}$

ε) Αν $\alpha+\beta=0$ τότε $\frac{a}{a+\beta}+\frac{\beta}{a+\beta}=1$

Απαντήσεις

α) Είναι σωστό. $\frac{2}{x-2}-\frac{x}{x-2}=\frac{2-x}{x-2}=-1$

β) Είναι λάθος. Πρέπει τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα.

γ) Είναι λάθος. Πρέπει τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα $1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

δ) Είναι σωστό. $\frac{x^2-3x+1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}=x-3+\frac{1}{x}$

ε) Είναι λάθος. Τα κλάσματα δεν ορίζονται γιατί έχουν παρονομαστή $\alpha+\beta=0$

2. Να κάνετε τις πράξεις.

α) $1+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$ β) $3-\frac{3}{x}$ γ) $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-1}$

δ) $\dfrac{1}{a-4}+\dfrac{1}{4-a}$ ε) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{x-1}$ στ) $\dfrac{3}{xy}-\dfrac{2}{3x}+\dfrac{4}{y^2}$

Λύση

α) Πρέπει τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα με ΕΚΠ = a^2

$$1+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^3}{a^2}+\frac{a}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+a^3+a+1}{a^2}$$

β) $3-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x}{x}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x-3}{x}$

γ) ΕΚΠ = $a^2-1=(a-1)(a+1)$

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-1}=\frac{a+1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-1}=\frac{a+2}{a^2-1}$$

δ) $\dfrac{1}{a-4}+\dfrac{1}{4-a}=\dfrac{1}{a-4}-\dfrac{1}{a-4}=0$

ε) ΕΚΠ = $x(x-1)$

$$\frac{3}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{3(x-1)}{x(x-1)}+\frac{x\cdot x}{x(x-1)}=\frac{3x-3+x^2}{x(x-1)}$$

στ) ΕΚΠ = $3xy^2$

$$\frac{3}{xy}-\frac{2}{3x}+\frac{4}{y^2}=\frac{3\cdot 3y}{3xy^2}-\frac{2y^2}{3xy^2}+\frac{4\cdot 3x}{3xy^2}=\frac{9y-2y^2+12x}{3xy^2}$$

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

3. Να κάνετε τις πράξεις.

α) $\dfrac{x+1}{2x^2-x}+\dfrac{1}{x}$ β) $\dfrac{3a}{a^2-4}-\dfrac{a^2}{2-a}$

γ) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^3-1}$ δ) $\dfrac{3}{4a^2-4}-\dfrac{a}{1+a}+1$

Λύση

Πρώτα βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών. Αν χρειαστεί παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

α) $2x^2-x=x(2x-1)$. Άρα ΕΚΠ $=\ x(2x-1)$

$$\frac{x+1}{2x^2-x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x(2x-1)}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x(2x-1)}+\frac{(2x-1)}{x(2x-1)}=\frac{x+1+2x-1}{x(2x-1)}=\frac{3x}{x(2x-1)}$$

β) $a^2-4=(a-2)(a+2)$ Άρα ΕΚΠ $=\ (a-2)(a+2)$

$$\frac{3a}{a^2-4}-\frac{a^2}{2-a}=\frac{3a}{(a-2)(a+2)}+\frac{a^2}{a-2}=\frac{3a}{(a-2)(a+2)}+\frac{a^2(a+2)}{(a-2)(a+2)}=$$

$$\frac{3a+a^3+2a^2}{(a-2)(a+2)}$$

γ) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ και $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Άρα ΕΚΠ $=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{x}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x+1-x^2-x}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

δ) $4a^2-4=4(a^2-1)=4(a-1)(a+1)$. Άρα ΕΚΠ $=4(a-1)(a+1)$

$$\frac{3}{4a^2-4}-\frac{a}{1+a}+1=\frac{3}{4(a-1)(a+1)}-\frac{a}{a+1}+1$$

$$=\frac{3}{4(a-1)(a+1)}-\frac{4a(a-1)}{4(a+1)(a-1)}+\frac{4(a+1)(a-1)}{4(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{3-4a(a-1)+4(a+1)(a-1)}{4(a-1)(a+1)}=\frac{3-4a^2+4a+4a^2-4}{4(a+1)(a-1)}=\frac{4a-1}{4(a+1)(a-1)}$$

4. Να κάνετε τις πράξεις.

α) $\frac{1}{2x+6}-\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{x}{x^2-9}$ β) $\left(\frac{x}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{y^2}{x-y}$

Λύση

α) $2x+6=2(x+3)$, $x^2-3x=x(x-3)$ και $x^2-9=(x-3)(x+3)$

Άρα ΕΚΠ $=2x(x-3)(x+3)$

$$\frac{1}{2x+6}-\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{x}{x^2-9}=\frac{1}{2(x-3)}-\frac{x-1}{2x(x-3)}-\frac{x}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{x(x+3)}{2x(x-3)(x+3)}-\frac{(x-1)(x+3)}{2x(x-3)(x+3)}-\frac{2x\cdot x}{2x(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+3x}{2x(x-3)(x+3)}-\frac{x^2+2x-3}{2x(x-3)(x+3)}-\frac{2x^2}{2x(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2-2x+3-2x^2}{2x(x-3)(x+3)}=\frac{-2x^2+x+3}{2x(x-3)(x+3)}$$

Αν το κλάσμα απλοποιείται θα πρέπει να απλοποιηθεί

$$-2x^2+x+3=-2x^2+x+2+1=-2\left(x^2-1\right)+x+1=-2(x+1)(x-1)+(x+1)=$$
$$-2(x+1)(x-1)+(x+1)=(x+1)(-2(x+1)+1)=(x+1)(-2x-1)$$

Άρα το κλάσμα $\frac{-2x^2+x+3}{2x(x-3)(x+3)}=\frac{(x+1)(-2x-1)}{2x(x-3)(x+3)}$ δεν απλοποιείται.

β) $\left(\frac{x}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{y^2}{x-y}=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{y}\right)\cdot\frac{y^2}{x-y}=\frac{x-y}{y}\cdot\frac{x+y}{y}\cdot\frac{y^2}{x-y}=x+y$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

α) $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ β) $\dfrac{x^2-y^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

γ) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\div\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)$ δ) $\dfrac{\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+2}}{\frac{7}{x^2-4}}$

Λύση

α) $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x-1\right)}=\dfrac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x^2\left(x-1\right)}=\dfrac{x+1}{x}$

β) $\dfrac{x^2-y^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{x^2-y^2}{\frac{y}{xy}+\frac{x}{yx}}=\dfrac{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}{\frac{y+x}{xy}}=\dfrac{xy\left(x-y\right)\left(x+y\right)}{y+x}=xy\left(x-y\right)$

γ) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\div\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)=\left(\frac{x^2}{yx}+\frac{y^2}{yx}-\frac{xy}{xy}\right)\div\left(\frac{x^3}{x^2y^2}+\frac{y^3}{y^2x^2}\right)=$

$\left(\frac{x^2+y^2-xy}{yx}\right)\div\left(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-xy}{yx}\cdot\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\frac{\left(x^2+y^2-xy\right)xy}{x^3+y^3}$

$=\dfrac{\left(x^2+y^2-xy\right)xy}{\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x+y\right)}=\dfrac{xy}{x+y}$

δ) $$\frac{\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+2}}{\frac{7}{x^2-4}}=\frac{\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}}{\frac{7}{(x+2)(x-2)}}=\frac{\frac{3(x+2)-4(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{7}{(x+2)(x-2)}}$$

$$=\frac{\frac{3(x+2)-4(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{7}{(x+2)(x-2)}}=\frac{\frac{-x+14}{(x-2)(x+2)}}{\frac{7}{(x+2)(x-2)}}=\frac{(-x+14)(x-2)(x+2)}{7(x-2)(x+2)}=\frac{-x+14}{7}$$

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}$$

Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση;

Λύση

Κατ' αρχάς θα πρέπει $x\neq 1$

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{x-2}{x-1}}=1-\frac{x-1}{x-2}$$

θα πρέπει επίσης $x\neq 2$ (και συνεχίζουμε)

$$1-\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{-1}{x-2}$$

7. Δίνεται η παράσταση:

$$\frac{1}{(a-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Α) Πότε ορίζεται η παράσταση;

Β) Να κάνετε τις πράξεις και να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης.

Λύση

Α) Η παράσταση ορίζεται όταν $a\neq\beta$, $a\neq\gamma$ και $\gamma\neq\beta$.

Β) ΕΚΠ $= (a-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$

$$\frac{1}{(a-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=$$

$$\frac{\beta-\gamma}{(a-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha-\beta}{(a-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$$

$$\frac{\beta-\gamma-\alpha+\gamma+\alpha-\beta}{(a-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=0$$