Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) $2x(x-5)=$.....................

β) $2x(.........)=2x^2-6x$

γ) $x^2(....+2)=x^5+......$

δ) $(x+y^2)(....+y)=x^3+.....+......+......$

Λύση

α) $2x(x-5)=2x^2-10x$

β) $2x(x-3)=2x^2-6x$

γ) $x^2(x^3+2)=x^5+2x^2$

δ) $(x+y^2)(x^2+y)=x^3+y^2x^2+xy+y^3$

2. Τα πολυώνυμα Α(x), Β(x) και Γ(x) έχουν βαθμούς 3, 5 και 4 αντιστοίχως.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου Α(x)•Β(x).

β) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου Α(x)• Γ(x).

γ) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου Α(x)•Β(x)•Γ(x).

Λύση

Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

α) Το πολυώνυμου Α(x)•Β(x).θα έχει βαθμό 8

β) Το πολυώνυμο Α(x)• Γ(x) έχει βαθμό 7.

γ) Το πολυώνυμο Α(x)•Β(x)•Γ(x) έχει βαθμό 12.

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x\left(x^2+4x-5\right)$

β) $(x+3)(x-4)$

γ) $(a+x)(ax+2)$

δ) $\left(x+y^2\right)\left(x^2+x\right)$

Λύση

α) $2x\left(x^2+4x-5\right)=2x^3+8x^2-10x$

β) $(x+3)(x-4)=x^2-4x+3x-12=x^2-x-12$

γ) $(a+x)(ax+2)=a^2x+2a+ax^2+2x$

δ) $\left(x+y^2\right)\left(x^2+x\right)=x^3+x^2+y^2x^2+y^2x$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x-3)\left(x^2+4x-5\right)$

β) $(x+3)(x-4)(x+5)$

γ) $(a+x+2)(ax+a+2)$

δ) $\left(x+y^2\right)\left(x^2+y\right)(x-y)$

Λύση

α) $(x-3)\left(x^2+4x-5\right)=x^3+4x^2-5x-3x^2+12x+15$

β) $(x+3)(x-4)(x+5)=\left(x^2-4x+3x+15\right)(x+5)=$

$\left(x^2-x+15\right)(x+5)=x^3+5x^2-x^2-5x+15x+75$

γ) $(a+x+2)(ax+a+2)=a^2x+a^2+2a+ax^2+ax+2x+2ax+2a+4$

δ) $\left(x+y^2\right)\left(x^2+y\right)\left(x-y\right)=\left(x^3+y^2x^2+xy+y^3\right)\left(x-y\right)=$

$x^4-yx^3+y^2x^3-x^2y^3+x^2y-xy^2+y^3x-y^4$

5. Αν P(x) = 2x(-3x + 1)(x + 1) και Q(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

Λύση

P(x) = 2x(-3x + 1)(x + 1) $=\left(-6x^2+2x\right)\left(x+1\right)=-6x^3-6x^2+2x^2+2x=-6x^3-4x^2+2x$

Δυο πολυώνυμα $\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$,

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν $\mu=\nu$ και $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1$, …, $\alpha_\nu=\beta_\nu$

Τα πολυώνυμα P(x) = $=-6x^3-4x^2+2x$ και Q(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ, είναι ίσα αν α = − 6 , β = − 4, γ = 2 και δ = 0

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

6. Αν A(x) = x^2 + x - 4 και B(x) = 5x − 2 να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) A(x) ·B(x)

β) A(x) ·(B(x) − 2x – 4)

γ) B(x) · [A(x) − B(x)]

Λύση

α) A(x) ·B(x) =

$=\left(x^2+x-4\right)\left(5x-2\right)=5x^3-2x^2+10x^2-2x-20x+8=5x^3+8x^2-22x+8$

β) A(x) ·(B(x) – 2x – 4) = A(x) · B(x) – A(x) · (2x – 4) =

$5x^3+8x^2-22x+8-\left(x^2+x-4\right)\left(2x-4\right)=$

$5x^3+8x^2-22x+8-2x^3+4x^2-2x^2+4x+8x-16=3x^3+10x^2-10x-8$

γ) B(x) • [A(x) — B(x)] = B(x) • A(x) — B(x)• B(x) =

$5x^3+8x^2-22x+8-\left(5x-2\right)\left(5x-2\right)=5x^3+8x^2-22x+8-25x^2+20x-4=$

$5x^3+8x^2-22x+8-25x^2+20x-4=5x^3-17x^2-2x+4$

7. Αν $\alpha^4 = 10$ και $\beta^4 = 9$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$(\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$

Λύση

$(\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) =$

$\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3-\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3-\beta^4=\alpha^4-\beta^4$ άρα

$(\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) = 10 - 9 = 1$

8. Αν για τους αριθμούς x , y ισχύει ότι: $x^3 - y^3 = 3xy(x - y)$ να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $A = (x - y)(x^2 - 2xy + y^2)$ είναι ίση με 0.

Λύση

$A = (x - y)(x^2 - 2xy + y^2) = x^3-2x^2y+y^2x-yx^2+2y^2x-y^3=x^3-3x^2y+3y^2x-y^3$

Αλλά $x^3 - y^3 = 3xy(x - y)$ άρα $x^3-y^3=3x^2y-3y^2x$ οπότε και

$x^3-y^3-3x^2y+3y^2x=0$ άρα και $A = 0$