Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_19039**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 36^\circ$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 6)

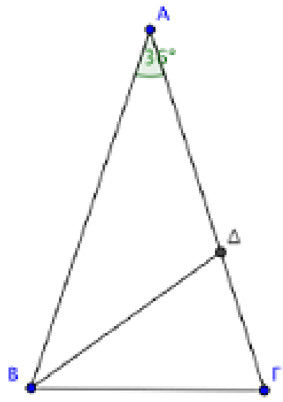
ii) $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ = 1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

Λύση:



α) i) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^O - 36^O}{2} = 72^O$ Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος

$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = 36^O \quad B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A} + A\hat{B}\Delta = 72^O$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ είναι όμοια

ii) Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ έχουμε

$\dfrac{B\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$ Όμως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, άρα $A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$ **(1)**

β) ΓΔ = ΑΓ – ΑΔ = 1 – ΑΔ άρα η **(1)** γράφεται

$A\Delta^2 = 1(1 - A\Delta) \Rightarrow A\Delta^2 + A\Delta - 1 = 0$ και αν θέσουμε ΑΔ = χ έχουμε την εξίσωση

$\chi^2 + \chi - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ και λύσεις

$\chi_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ και $\chi_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ που απορρίπτεται ως αρνητική άρα ΑΔ=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ και

$$\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ (ο αριθμός φ)

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός