Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_19037**

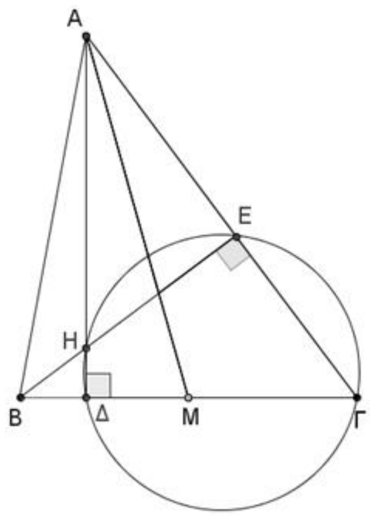
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο $AM=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$. Αν τα ύψη του

Η, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι οξεία.

β) $AH\cdot A\Delta=AE\cdot A\Gamma$

Λύση:



α) Σύμφωνα με 1^o θεώρημα διαμέσων των διαμέσων, το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Οπότε:

$\beta^2+\gamma^2=2{\mu_\alpha}^2+\frac{\alpha^2}{2}$ άρα $\beta^2+\gamma^2=2\left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow$

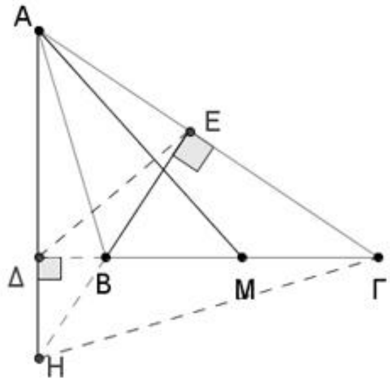
$\beta^2+\gamma^2=2\frac{5\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{2}=3\alpha^2$ Άρα $\beta^2+\gamma^2=3\alpha^2>\alpha^2$ που σημαίνει $\hat{A}<90^o$

Οπότε η γωνία Α είναι οξεία.

β) Επειδή οι Δ, E είναι ορθές, το τετράπλευρο $H\Delta\Gamma E$ εγγράφεται σε κύκλο, ως απέναντι γωνίες που είναι παραπληρωματικές. Εφαρμόζουμε το θεώρημα των τεμνόμενων χορδών που λέει ότι εάν δυο χορδές ΗΔ, ΕΓ ενός κύκλου τέμνονται σε ένα σημείο Α τότε ισχύει ότι:

$AH\cdot A\Delta=AE\cdot A\Gamma$

Αν όμως το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με, έστω, $B > 90^0$:



Επειδή $\Delta = E = 90^0$, η πλευρά $H\Gamma$ φαίνεται υπό ίσες γωνίες από τις απέναντι κορυφές Δ, E το τετράπλευρο $H\Delta E\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Οπότε πάλι από θεώρημα τεμνόμενων χορδών $(H\Delta, \Gamma E)$ παίρνουμε ότι: $AH \cdot A\Delta = AE \cdot A\Gamma$.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός