# Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

**Θέμα 4** GI_V_GEO_4_19032

Δίνονται δύο κύκλοι (Ο, α) και (Κ, β) με α>β , οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α ,Β σημεία των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα. Από το Μ Θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΛ = \dfrac{αβ}{α+β}$

(Μονάδες 8)

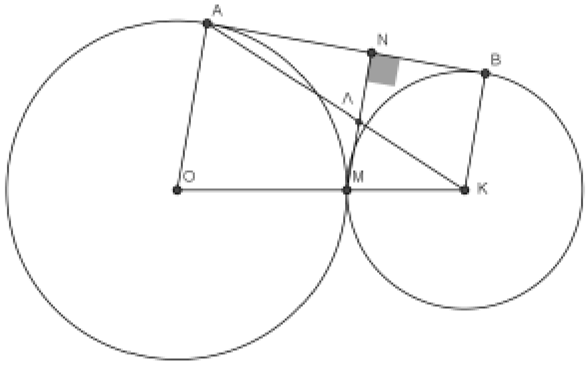
β) $ΛΝ = \dfrac{αβ}{α+β}$

(Μονάδες 8)

γ) Αν $E_1$ και $E_2$ είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα, τότε

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2.$$

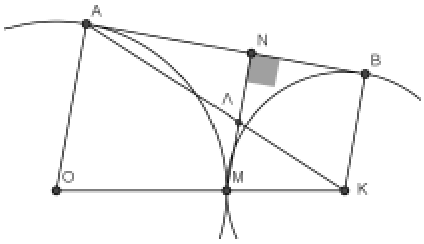
(Μονάδες 9)



**Λύση:**

α) Επειδή ΑΟ//ΜΝ//ΚΒ άρα $\frac{\mathrm{\Lambda M}}{\mathrm{AO}}=\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KO}}\Rightarrow\frac{\mathrm{\Lambda M}}{\alpha}=\frac{\beta}{\beta+\alpha}\Rightarrow\mathrm{\Lambda M}=\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$

β) $\frac{\mathrm{\Lambda N}}{\mathrm{BK}}=\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{AK}}\Rightarrow\frac{\mathrm{\Lambda N}}{\beta}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OK}}=\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\Rightarrow\mathrm{\Lambda N}=\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$




γ) $\mathrm{E}_1=\pi\cdot\alpha^2$ και $\mathrm{E}_2=\pi\cdot\beta^2$

Τα τρίγωνα ΑΛΝ και ΚΜΝ έχουν μία γωνία ίση

( $\mathrm{A\hat{\Lambda}N}=\mathrm{K\hat{\Lambda}M}$ κατακορυφήν) άρα για τους λόγους των εμβαδών θα ισχύει:

$$\left(\frac{(\mathrm{A\Lambda N})}{(\mathrm{K\Lambda M})}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{\Lambda N}\cdot\mathrm{\Lambda A}}{\mathrm{\Lambda M}\cdot\mathrm{\Lambda K}}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{\Lambda A}}{\mathrm{\Lambda K}}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MK}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{\pi\beta^2}=\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}$$

**Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός**