Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_19027**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ//ΓΒ

(Μονάδες 5)

β) $ΖΕ=\frac{1}{2}ΕΒ$.

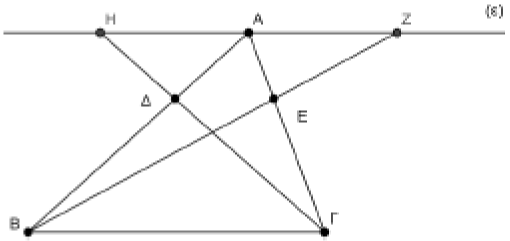
(Μονάδες 7)

γ) $ΑΖ=\frac{1}{2}ΒΓ$.

(Μονάδες 7)

δ) (ΒΗΖ) =2 (ΑΒΖ)

(Μονάδες 6)



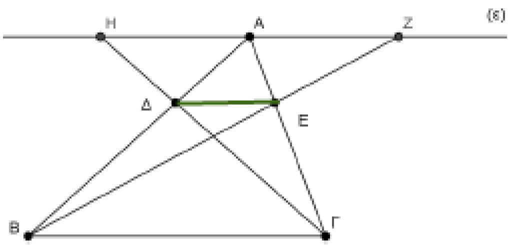
Λύση:

α) Επειδή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ ισχύει ότι ΔΕ//ΒΓ

(αντίστροφο του θεωρήματος Θαλή)

β) Επειδή ΔΕ//ΒΓ $\Rightarrow$ ΔΕ//ε άρα και

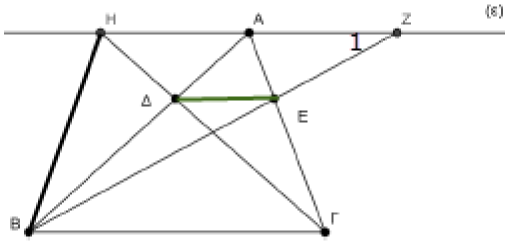
$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΖΕ}{ΒΖ}$ οπότε $\frac{ΖΕ}{ΒΖ}=\frac{1}{3}$ και $\frac{ΒΕ}{ΒΖ}=\frac{2}{3}$



Επομένως $BE = 2EZ \Leftrightarrow ZE = \frac{1}{2}EB$ **(1)**

γ) Επειδή ΒΓ//ΑΖ τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΒΓ είναι όμοια. Άρα $\frac{AZ}{B\Gamma} = \frac{ZE}{EB} = \frac{1}{2}$ (λόγω της **(1)**)

Άρα $AZ = \frac{1}{2}B\Gamma$



δ) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΗΖ έχουν τη γωνία $\hat{Z}_1$ κοινή άρα για τα εμβαδά τους (ΑΒΖ) και (ΒΗΖ) ισχύει ότι $\frac{(ABZ)}{(BHZ)} = \frac{ZA \cdot ZB}{ZH \cdot ZB} = \frac{ZA}{ZH}$ **(2)**

Επειδή ΒΓ//ΑΗ τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΒΓ είναι όμοια. Άρα $\frac{AH}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{1}{2}$ (όπως προκύπτει από τη σχέση $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$) Άρα $AH = \frac{1}{2}B\Gamma = AZ$ **(3)**

Επομένως η **(2)** λόγω της **(3)** θα γίνει $\frac{(ABZ)}{(BHZ)} = \frac{ZA}{ZH} = \frac{ZA}{2 \cdot ZA} = \frac{1}{2}$

απ' όπου τελικά έχουμε $(BHZ) = 2 \cdot (ABZ)$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός