Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β’ Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_19025**

Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma}$

(Μονάδες 7)

β) $\mathrm{AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma}$

(Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2}$

(Μονάδες 9)

Λύση:

α) ΜΔ·ΜΒ=ΑΜ·ΜΓ (δύναμη σημείου ως προς κύκλο) άρα

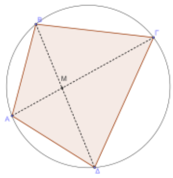
$$\mathrm{\frac{B\Delta}{2} . \frac{B\Delta}{2} = AM \cdot M\Gamma \Leftrightarrow B\Delta^2 = 4AM \cdot M\Gamma}$$

β) Από το θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$$\mathrm{AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2}}$$ και λόγω α)

$$\mathrm{2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2} = 2AM^2 + 2AM \cdot M\Gamma}$$ άρα

$$\mathrm{AB^2 + A\Delta^2 = 2AM(AM + M\Gamma) = 2AM \cdot A\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$



γ) Ομοίως από το θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΓΒΔ βρίσκουμε ότι

$\mathrm{\Gamma B^2 + \Gamma\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma}$ **(2)** και προσθέτοντας τις ισότητες **(1)** και **(2)** κατά μέλη έχουμε :

$$\mathrm{AB^2 + A\Delta^2 + \Gamma B^2 + \Gamma\Delta^2 = 2A\Gamma(AM + A\Gamma) = 2A\Gamma \cdot A\Gamma = 2A\Gamma^2}$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ Online Education
Σολωμού 29 Αθήνα ☎ 210.38.22.157 ☎ 210.38.22.495
On-line Φροντιστήριο www.arnos.gr info@arnos.gr