Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_19022**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 8)

β) $ΜΡ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

(Μονάδες 8)

γ) (ΑΒΓ)=6 (ΜΡΓ)

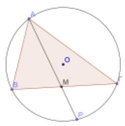
(Μονάδες 9)

Λύση:

α) Από τη θεωρία ξέρουμε ότι $\gamma^2 + \beta^2 = \mu_\alpha^{\ 2} + \frac{\alpha^2}{2}$

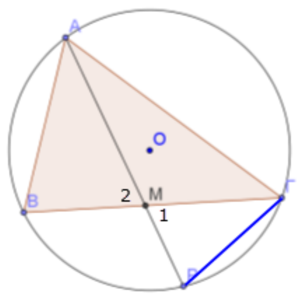
Αν $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ θα έχουμε $2\alpha^2 = \mu_\alpha^{\ 2} + \frac{\alpha^2}{2}$ οπότε

$3\alpha^2 = 2\mu_\alpha^{\ 2}$ άρα $\mu_\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



β) Από τη θεωρία των τεμνουσών του κύκλου έχουμε ΑΜ·ΜΡ = ΜΒ·ΜΓ και λόγω α)

$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ΜΡ= $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ και $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ΜΡ = $\frac{\alpha^2}{4}$ άρα ΜΡ = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$



γ) Η είναι ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ άρα για τα εμβαδά (ΑΒΓ) και (ΑΜΒ) ισχύει ότι: (ΑΒΓ)=2(ΑΜΒ)

Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΡΓ έχουν $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ και συνεπώς

$$\frac{(ΑΒΜ)}{(ΜΡΓ)} = \frac{ΑΜ \cdot ΒΜ}{ΜΡ \cdot ΜΓ}$$

Άρα $$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΜΡΓ})}=\frac{2(\text{ΑΒΜ})}{(\text{ΜΡΓ})}=2\frac{\text{ΑΜ}\cdot\text{ΒΜ}}{\text{ΜΡ}\cdot\text{ΜΓ}}=2\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΡ}}=2\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=6$$ άρα (ΑΒΓ)=6(ΜΡΓ)

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός