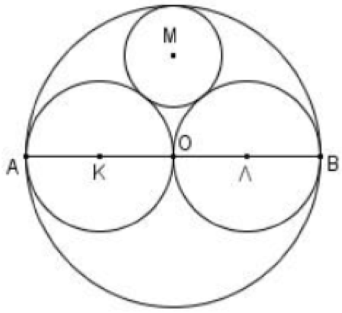
Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 2 **GI_V_GEO_4_19006**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου Ο.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$.

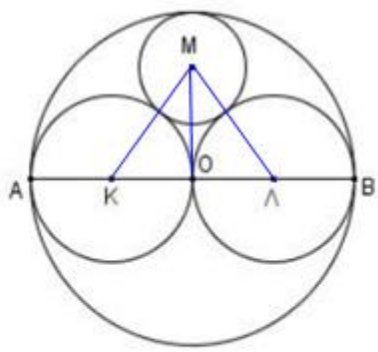
(Μονάδες 13)

Λύση:

α) ΚΑ $= \frac{R}{2}$ και ΛΒ $= \frac{R}{2}$

Οι κύκλοι (Μ, $\frac{\rho}{2}$) και (Κ, $\frac{R}{2}$) εφαπτόμενοι εξωτερικά, η διάκεντρος ισούται με το άθροισμα των ακτίνων άρα

άρα $KM = \frac{R}{2} + \rho$ ομοίως και $\Lambda M = \frac{R}{2} + \rho$



Οι κύκλοι (Ο, R) και (Μ,ρ/2) εφαπτόμενοι εσωτερικά ,η διάκεντρος ισούται με τη διαφορά των ακτίνων

OM=R-p

β) ΚΟ=ΟΛ= $\frac{R}{2}$ άρα ΛΟ διάμεσος στο τρίγωνο ΚΜΛ. Από θεώρημα διαμέσου έχουμε:

$$KM^2+\Lambda M^2=2MO^2+\frac{K\Lambda^2}{2} \quad \text{και} \quad 2(\frac{R}{2}+\rho)^2=2(R-\rho)^2+\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(\frac{R}{2})^2+\rho^2+2R\rho=2R^2+2\rho^2-4R\rho+\frac{R^2}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2R^2=6R\rho \quad \Leftrightarrow \quad R^2=3R\rho \quad \Leftrightarrow \quad R=3\rho$$

Παρατήρηση Μπορούσε να δειχθεί και με το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα τρίγωνα ΟΜΚ ή ΟΜΛ

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός