Θέμα 4 GI_V_GEO 4_18985

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

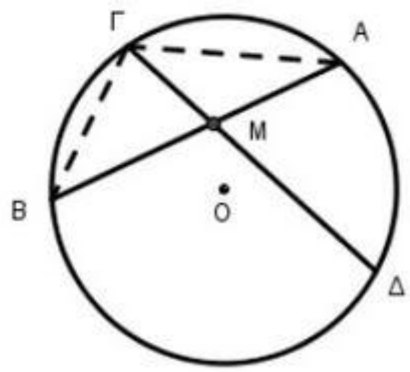
α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ να αποδείξετε ότι ΑΜ ·ΑΒ = $ΑΓ^2$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι ΑΒ ·ΑΜ = $ΑΓ^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΒΓ:



$M\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ ως κοινή γωνία

$M\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}A$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν προς ίσα τόξα

Επομένως τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια. Οπότε:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AM}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma^2 = AM \cdot AB$$

β) $A\Gamma^2 = AM \cdot AB <=> \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AM}{A\Gamma}$

Οπότε συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΓ, ΑΒΓ:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AM}{A\Gamma}$$

$M\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ ως κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα ΑΜΓ, ΑΒΓ είναι όμοια. (Έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες αυτών γωνίες ίσες)

Οπότε $\mathrm{M\hat{\Gamma}A} = \mathrm{B\hat{\Gamma}A} <=> \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

Άρα το Α είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός