Άσκηση 1.4

Έστω $\alpha, \beta > 0$ και $n \in /N$.

Αποδείξτε ότι $\dfrac{\alpha^n + \beta^n}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^n$.

Απόδειξη

Δε βλάπτει τη γενικότητα να υποθέσουμε ότι $0 < \alpha \leq \beta$. Τότε ξέρουμε ότι ισχύει $0 < \alpha^n \leq \beta^n \Leftrightarrow \beta^n - \alpha^n \geq 0$ (άσκηση 2).

Επομένως $\forall n \in /N$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha \leq \beta \\ 0 \leq \beta^n - \alpha^n \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\left(\beta^n - \alpha^n\right) \leq \beta\left(\beta^n - \alpha^n\right) \Rightarrow \boxed{\alpha\beta^n + \beta\alpha^n \leq \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε τη σχέση που μας ενδιαφέρει με επαγωγή.

Για $n = 1$, η σχέση γίνεται $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ ισχύει.

Για $n = \nu$ ισχύει η σχέση $\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^\nu \leq \dfrac{\alpha^\nu + \beta^\nu}{2}$.

Θα δείξω ότι ισχύει η ίδια σχέση για $n = \nu + 1$.

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\nu+1} = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{\alpha^\nu + \beta^\nu}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{\nu+1} + \beta^{\nu+1} + \alpha\beta^\nu + \beta\alpha^\nu}{4} \overset{(1)}{\leq} \frac{\alpha^{\nu+1} + \beta^{\nu+1} + \alpha^{\nu+1} + \beta^{\nu+1}}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{\nu+1} + \beta^{\nu+1}}{2} .$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.