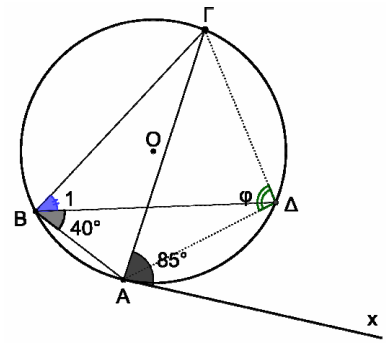


1. Στο σχήμα που ακολουθεί, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) σε σημείο του A και επιπλέον ισχύουν $\widehat{\Gamma Ax} = 85^\circ$ και $\widehat{\Delta BA} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^\circ$.

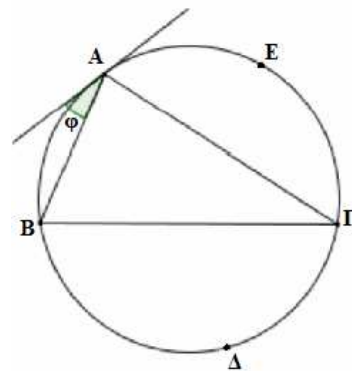
β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ .



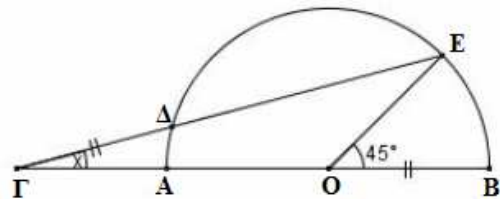
2. Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά AB . Αν το μέτρο του τόξου $B\Delta\Gamma$ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $A\epsilon\Gamma$.



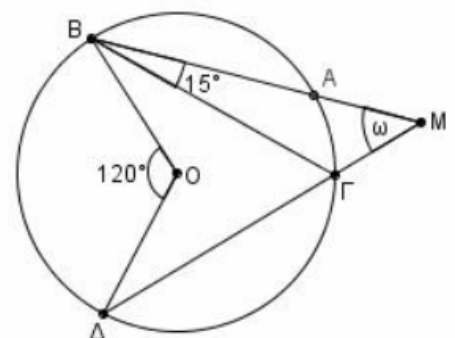
3. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την BA προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και η γωνία $\widehat{BOE} = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta\Gamma O} = x$.



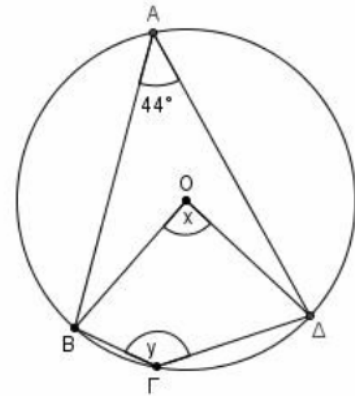
4. Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\widehat{\Gamma BA}$ είναι 15° .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Gamma\Delta$.

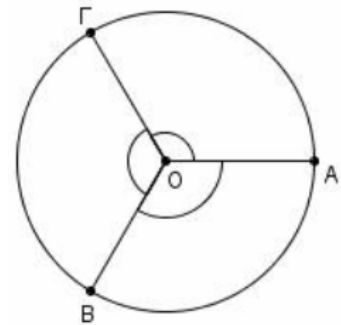
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .



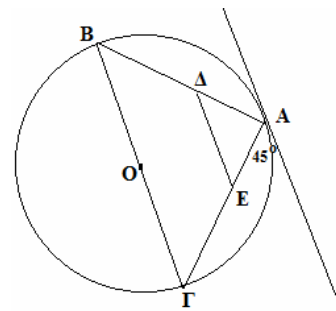
5. Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία \widehat{BAD} να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$.
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία x .
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .



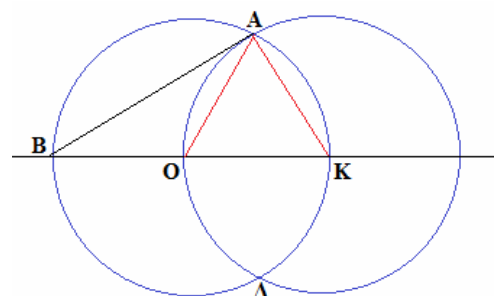
6. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , BOG και GOA .
- α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία BOG .
- β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABG ως προς τις πλευρές του.
- γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και OG στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



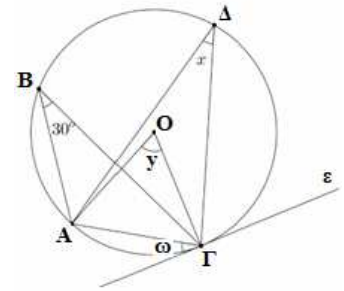
7. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου $B\Gamma$. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του A ώστε να σχηματίζει με τη χορδή AG γωνία 45° . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$.
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.



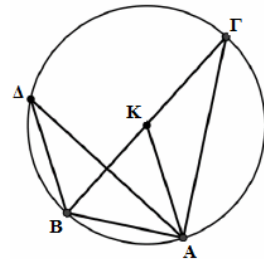
8. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .
- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .



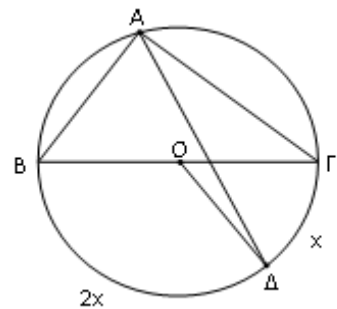
9. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
 - Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές.



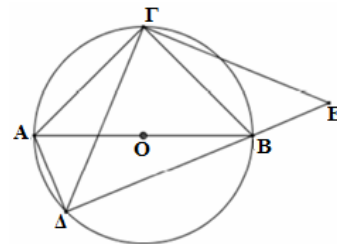
10. Έστω κύκλος κέντρου K , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA=KA$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ .
- να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.
 - να υπολογίσετε την γωνία $B\Delta A$.
 - να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



11. Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.
Να υπολογίσετε:
- το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$.
 - τη γωνία $BO\Delta$.
 - τη γωνία $BA\Delta$.

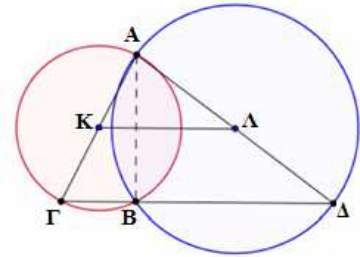


12. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B), θεωρούμε σημείο E ώστε $BE=AD$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα.
 - Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .
 - Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.



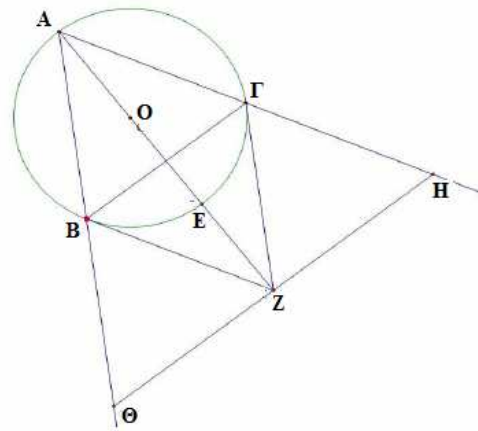
13. Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$.
- β) τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.
- γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο.



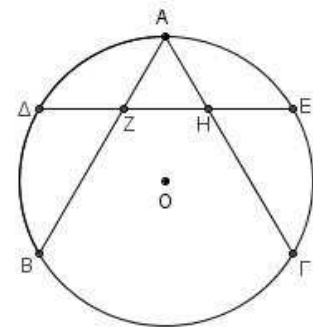
14. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β) Το τετράπλευρο $AGZB$ είναι ρόμβος.
- γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο, με $B\Theta = BZ$ και $\Theta H = 2 \cdot B\Gamma$.



15. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και AG , το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
- γ) Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .



16. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σε ένα σημείο του E και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 - ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.
- β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογώνιου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

17. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

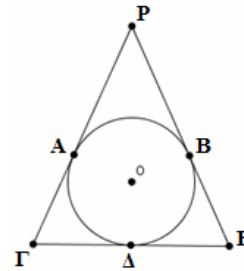
i. $PG = \Gamma\Delta + AP$.

ii. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$.

β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.



18. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) $\Gamma A = \Delta B$.

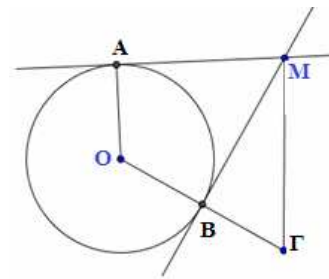
γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

19. Από σημείο M εξωτερικό κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA και MB του κύκλου. Αν Γ είναι το συμμετρικό σημείο του κέντρου O ως προς την MB , να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB = M\Gamma$

β) $\widehat{AM\Gamma} = 3\widehat{BM\Gamma}$

γ) το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου.

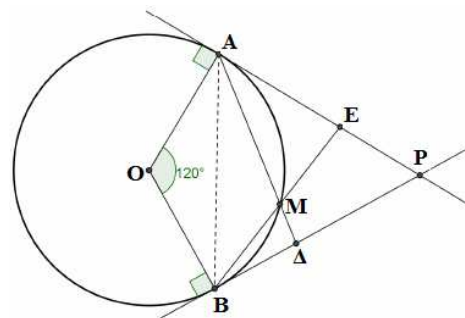


20. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM , οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις PB και PA και στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.

β) $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$.

γ) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και PEB είναι ίσα.

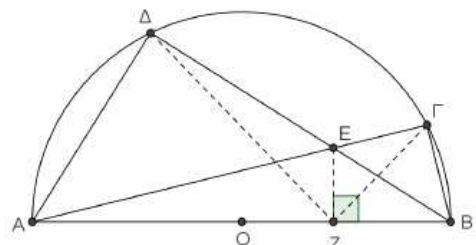


21. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσες.

β) Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.

γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta Z\Gamma}$.

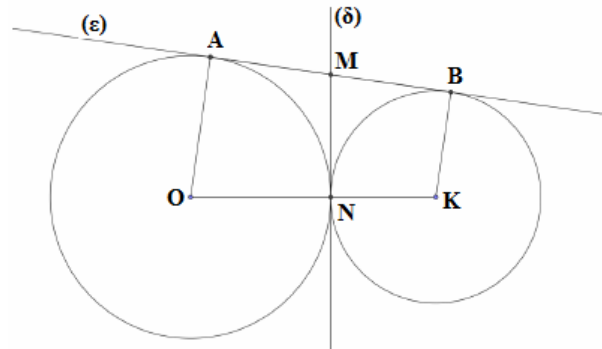


22. Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την (ϵ) στο M . Να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσον του AB .

β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$.

γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$.



23. Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των $OB, O\Gamma$ τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

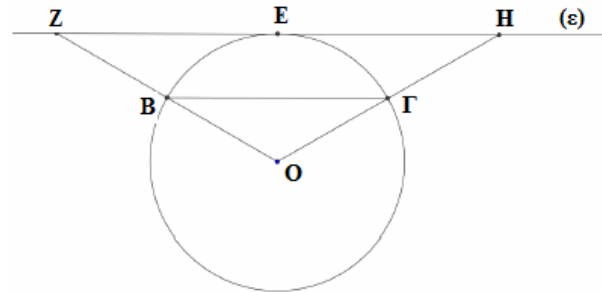
α) $B\Gamma \parallel ZH$

β) $OZ = OH$

γ) Αν B είναι το μέσον της OZ :

i. να αποδείξετε ότι $\widehat{BEZ} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$.

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

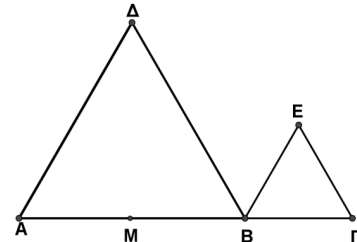


24. Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B, BE\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta \parallel BE$).

β) Τα τρίγωνα $\Delta MB, \Delta EB$ είναι ίσα.

γ) Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

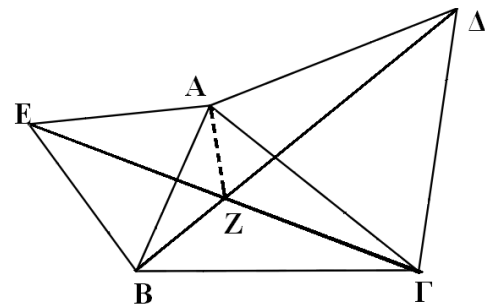


25. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα $AEB, A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta, \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

β) Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta, AZBE$ είναι εγγράψιμα.

γ) Η γωνία $BZ\Gamma$ είναι 120° .



26. Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy} = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox, με $OA=OB$. Η (ε) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E.

Να αποδείξετε ότι:

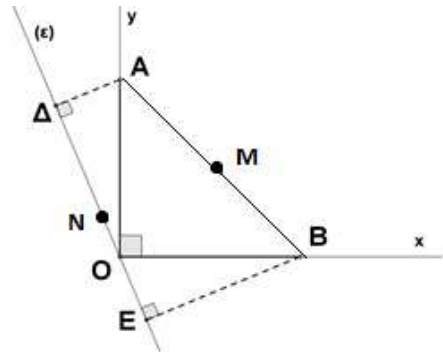
α) Τα τρίγωνα OAD και OEB είναι ίσα.

β) $AD+BE=DE$.

γ) $MN = \frac{DE}{2}$, όπου MN είναι το ευθύγραμμο

τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE και AB.

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο ισοσκελές.



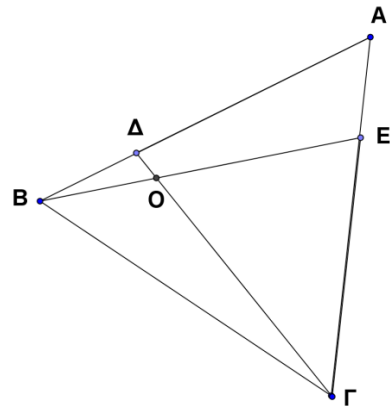
27. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $AD=GE$. Έστω O το σημείο τομής των ΓΔ και BE.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{BEG} = \widehat{GAA}$.

ii. $\widehat{BOG} = 120^\circ$.

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο AEOΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB=AG$ και AΔ, BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $BΓ=2EΔ$.

β) $\widehat{BEΔ} = \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) Το τετράπλευρο AEDB είναι εγγράψιμο.

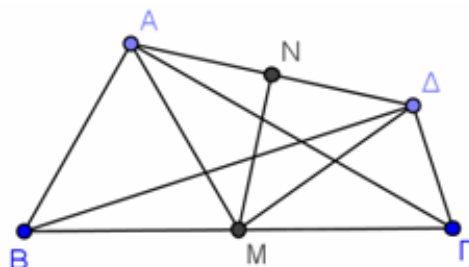
δ) $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$.

29. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και ΔBΓ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των BΓ και AΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AM=MΔ$.

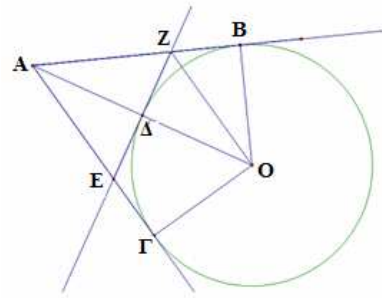
β) Η MN είναι κάθετη στην AΔ.

γ) $\widehat{ΓBΔ} = \widehat{ΓAΔ}$.



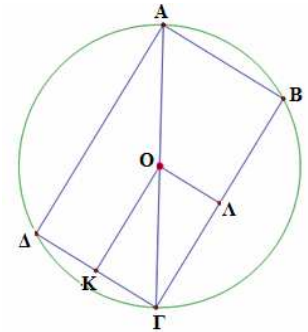
30. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο με $OA=2OB$.
- Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.
- $2ZB=AZ$.
- Το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



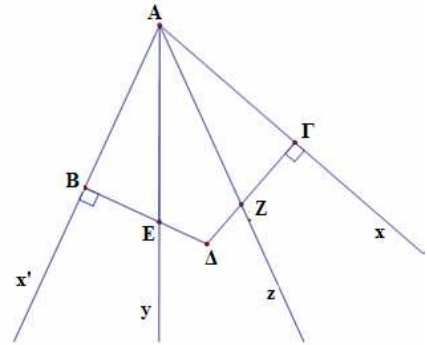
31. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και AG μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $AD=BG$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.
- Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- Το τετράπλευρο $O\Lambda\Gamma K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



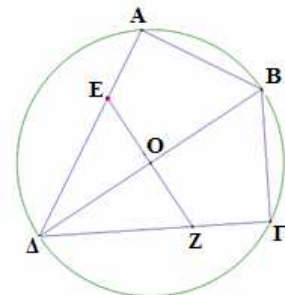
32. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB=AG$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.
- Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.
- Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.



33. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.
- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta\Gamma B$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

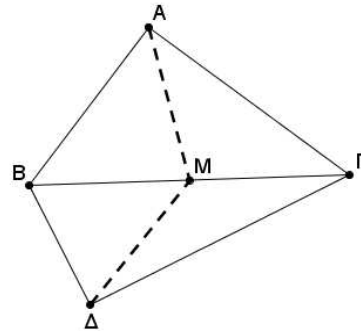


34. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta}=90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$.

γ) $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$.



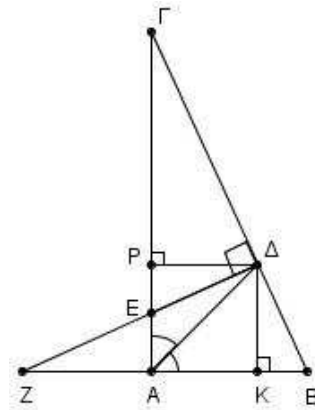
35. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \widehat{\Delta E\Gamma}$.

ii. $\Delta E = \Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma Z$.



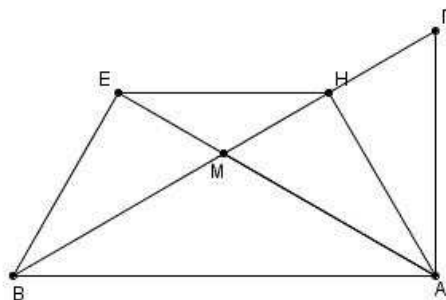
36. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) έχουμε ότι $\hat{B}=30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$.

β) $AH = BE$.

γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο

δ) $EH \parallel AB$.



37. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

β) Έστω H το ορθόκентρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B H$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν M το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

- 38.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τα ύψη AK και $ΓΛ$. Αν E το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ τότε:
- α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.
 - β)** Αν η γωνία B είναι 80° , να αποδείξετε ότι η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .