ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ, ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. **α**) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\leq 3$ και $2x^2-x-1\geq 0$.
β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

2. Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.
α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

3. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$
β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2+2x+3\leq 0$.
γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

4. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $|x+5|\geq 3$.
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

5. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-4|=3|x-1|$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $|3x-5|>1$.
γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$.
β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

7. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<4$.
β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$.

8. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-6\leq 0$ (2).
α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).
β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

9. **α**) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$.
β) Δίνεται η παράσταση $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$
i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι $A=-x^2+11x-24$.
ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

10. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $3x^2-4x+1\leq 0$.
β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

11. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

12. **α**) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-x-2=0$

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. **α**) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

14. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in R$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta\in R$.

α) Να δείξετε ότι $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

β) Να δείξετε ότι $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. **α**) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\leq 5$.

ii) $|2x-3|\geq 1$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

17. **α**) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-x-6=0$ (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|<2$ (2)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

18. **α**) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: **i**) $|1-2x|<5$ και **ii**) $|1-2x|\geq 1$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

19. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

20. Δίνονται οι ανισώσεις: $2\leq|x|\leq 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

21. Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\leq 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

22. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2 , $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$.

23. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: α, α^2, $\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

24. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\leq 5$.

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$.

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\leq 5$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\leq 5$ Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

25. **α**) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

26. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$και x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$.

27. Δίνεται το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) **i**) Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$;

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

28. Δίνεται το τριώνυμο x^2-2x-8.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

β) Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

29. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

30. **α**) **i**) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2+9x+18$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.

β) **i**) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του x.

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

31. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης
$x^2-4\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)x+16=0$, $\lambda\in(0,4)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

32. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$ με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

33. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90ο) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε x+y=10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0, 10)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$.

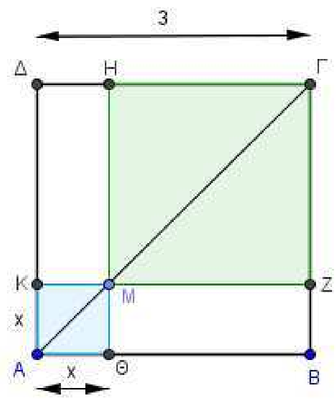
γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

35. Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ=3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



36. Δίνεται η ανίσωση $|x+1|<4$ (1).

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\leq0$.

37. Δίνεται η ανίσωση $|x-1|<3$ (1).

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\geq0$.

38. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

39. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1).

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

ii) Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

40. Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$.

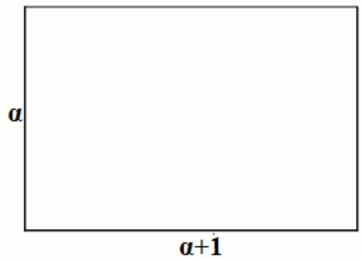
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in R$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$.

41. **α**) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α+1, όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

42. **α**) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in R$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με α<β για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

43. Δίνεται η παράσταση $K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

β) Για ποιες τιμές του $x\in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

44. Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

β) $x^2+4x+3<0$.