ΑΣΚΗΣΗ
(Εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης Euler)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x^2 \cdot y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad x > 0 \quad (1)$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι η (1) είναι Δ.Ε. της μορφής Euler. Θέτουμε:

$$x = e^t, \quad x > 0 \quad (2)$$

και παίρνουμε:

$$y(x) = y(e^t) = u(t)$$

Επίσης έχουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \overset{(2)}{=} u'(t) \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt}\left(u'(t) \cdot \frac{1}{e^t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \overset{(2)}{=} \frac{u''(t) \cdot e^t - u'(t) \cdot e^t}{e^{2t}} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{u''(t) - u'(t)}{e^{2t}}$$

Οπότε η Δ.Ε. (1) από τις προηγούμενες σχέσεις γίνεται:

$$e^{2t} \cdot \frac{u''(t) - u'(t)}{e^{2t}} - 2e^t \cdot \frac{u'(t)}{e^t} + 2u(t) = e^{3t} \quad \Rightarrow$$

$$u''(t) - u'(t) - 2u'(t) + 2u(t) = e^{3t} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = e^{3t}} \quad (3)$$

Η (3) είναι γραμμική Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς:

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}} \quad \text{απλές ρίζες}$$

Οπότε η γενική λύση είναι:

$$\boxed{u_o(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}} \quad (4)$$

Εύρεση μιας λύσης της Δ.Ε. (3). Επειδή $h(t) = e^{3t}$, σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, θα έχουμε λύση της μορφής:

$$\boxed{u_\mu(t) = Ae^{3t} \cdot t^\kappa}$$

με $\kappa = 0$ αφού το $\beta = 3$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Δηλαδή:

$$u_\mu(t) = Ae^{3t}$$

Με παραγώγιση προκύπτει:

$$u'_\mu(t) = 3Ae^{3t}, \qquad u''(t) = 9Ae^{3t}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στην (3), έχουμε:

$$9Ae^{3t} - 3\;3\;\;e^{3t}\cdot\;\;2\;\;Ae^{3t}\;\;\;e^{3t} + \;\;= A\;\;\;\;2A = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Άρα:

$$\boxed{u_\mu(t) = \frac{1}{2}e^{3t}} \qquad (5)$$

Συνεπώς η γενική λύση της (3) από τις (4), (5) είναι:

$$\boxed{u(t) = c_1 \cdot e^t \quad c_2\;\; e^{2t} \quad \frac{1}{2}e^{3t}} \qquad +$$

Τέλος με την αντικατάσταση $t = \ell nx$ παίρνουμε τη γενική λύση της (1):

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot x \quad c_2\;\; x^2 \quad \frac{1}{2}x^3} \qquad +$$

Βλέπε τυπολόγιο: «Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης και ανώτερης»
Μεθοδολογία: Βιβλίο Ι.Π. Κρόκου «Διαφορικές εξισώσεις» σελ. 113 – 116, 121 – 123 και λυμένα θέματα 11, 12, σελ. 132 – 134

ΑΣΚΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ