ΑΣΚΗΣΗ
(Εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης Euler)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$x^3 y'' + x^2 y' - xy = x - 1, \qquad (x > 0) \qquad (1)$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Διαιρώντας τη Δ.Ε. (1) με x $(x>0)$, προκύπτει:

$$\boxed{x^2 y'' + xy' - y = \frac{x-1}{x}} \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η (2) είναι Δ.Ε. της μορφής Euler. Θέτουμε:

$$x = e^t, \quad x > 0 \qquad (3)$$

και παίρνουμε:

$$y(x) = y(e^t) = u(t)$$

Επίσης έχουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \overset{(3)}{=} u'(t)\cdot\frac{1}{e^t}$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(u'(t)\cdot\frac{1}{e^t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \overset{(3)}{=} \frac{u''(t)e^t - u'(t)e^t}{e^{2t}}\cdot\frac{1}{e^t} = \frac{u''(t)-u'(t)}{e^{2t}}$$

Οπότε η Δ.Ε. (2) από τις προηγούμενες σχέσεις γίνεται:

$$e^{2t}\cdot\frac{u''(t)-u'(t)}{e^{2t}} + e^t\cdot\frac{u'(t)}{e^t} - u(t) = \frac{e^t-1}{e^t} \qquad \Rightarrow$$

$$u''(t) - u'(t) + u'(t) - u(t) = 1 - e^{-t} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{u''(t) - u(t) = 1 - e^{-t}} \qquad (4)$$

Η (4) είναι γραμμική Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς:

$$u''(t) - u(t) = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda = \pm 1} \quad \text{απλές ρίζες}$$

Οπότε η γενική λύση είναι:

$$\boxed{u_o(t) = c_1\cdot e^t + c_2\cdot e^{-t}} \qquad (5)$$

Εύρεση μιας λύσης της Δ.Ε. (4):
Βρίσκουμε μια μερική λύση της (4). Παρατηρούμε ότι:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

με $h_1(t) = 1$ και $h_2(t) = -e^{-t}$. Συνεπώς αρκεί να βρούμε τις μερικές λύσεις των Δ.Ε.:

$$\boxed{\begin{matrix} u'' - u = 1 & (6) \\ u'' - u = -e^{-t} & (7) \end{matrix}}$$

- Για την (6) έχουμε $h_1(t) = 1$. Η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u_{\mu 1}(t) = At^{\kappa}}$$

με $\kappa = 0$ αφού το 0 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Δηλαδή:

$$u_{\mu 1}(t) = A$$

Με παραγώγιση προκύπτει:

$$u'_{\mu 1}(t) = 0, \quad u''_{\mu 1}(t) = 0$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στην (6), έχουμε:

$$0 - A = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -1}$$

Άρα:

$$\boxed{u_{\mu 1}(t) = -1}$$

- Για την (7) έχουμε $h_2(t) = -e^{-t}$. Η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u_{\mu 2}(t) = Ae^{-t} \cdot t^{\kappa}}$$

με $\kappa = 1$ αφού το $\beta = -1$ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, δηλαδή:

$$u_{\mu 2}(t) = At \cdot e^{-t}$$

Με παραγώγιση προκύπτει:

$$u'_{\mu 2}(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t} = A(1 - t)e^{-t}$$
$$u''_{\mu 2}(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = A(t - 2)e^{-t}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στην (7), έχουμε:

$$A(t-2)e^{-t} - Ate^{-t} = -e^{-t} \quad \Rightarrow \quad At - 2A - At = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Άρα:

$$\boxed{u_{\mu 2}(t)=\frac{1}{2}te^{-t}}$$

Συνεπώς η μερική λύση της (4) είναι:

$$u_\mu(t)=u_{\mu 1}(t)+u_{\mu 2}(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_\mu(t)=-1+\frac{1}{2}te^{-t}} \qquad (8)$$

Η γενική λύση της (4) από τις (5), (8) είναι:

$$\boxed{u(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}-1+\frac{1}{2}te^{-t}}$$

Τέλος με την αντικατάσταση $t=\ell nx$ παίρνουμε τη γενική λύση της (2)

$$\boxed{y(x)=c_1x+c_2\frac{1}{x}-1+\frac{1}{2}\frac{\ell nx}{x}}$$

Βλέπε τυπολόγιο: «Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης και ανώτερης»
Μεθοδολογία: Βιβλίο Ι.Π. Κρόκου «Διαφορικές εξισώσεις» σελ. 113 – 116, 121 – 123 και λυμένα θέματα 11, 12, σελ. 132 – 134

ΑΣΚΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ