

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\int \frac{1}{x^3-x} \cdot dx = ;$$

► Η ρητή συνάρτηση $\frac{1}{x^3-x}$, γράφεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα :

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x \cdot (x^2-1)} = \frac{1}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \quad , \text{ οπότε γράφεται ισοδύναμα :}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Πολ/βούμε με ΕΚΠ} = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \text{ οπότε έχουμε :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{x} \cdot (\cancel{x}-1) \cdot (\cancel{x}+1)} \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x}-1) \cdot (\cancel{x}+1) = \frac{A}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x}-1) \cdot (\cancel{x}+1) + \frac{B}{\cancel{x}-1} \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x}-1) \cdot (\cancel{x}+1) + \frac{\Gamma}{\cancel{x}+1} \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x}-1) \cdot (\cancel{x}+1)$$

$$\Leftrightarrow 1 = A \cdot (x-1) \cdot (x+1) + B \cdot x \cdot (x+1) + \Gamma \cdot x \cdot (x-1)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Για } x=1: \quad 1 = A \cdot 0 \cdot 2 + B \cdot 1 \cdot 2 + \Gamma \cdot 1 \cdot 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Για } x=-1: \quad 1 = A \cdot (-2) \cdot 0 - B \cdot 0 - \Gamma \cdot (-2) \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot \Gamma \Leftrightarrow \Gamma = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Για } x=0: \quad 1 = -A + B \cdot 0 \cdot 1 + \Gamma \cdot 0 \cdot (-1) \Leftrightarrow A = -1.$$

► Λέλος, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται συνεπώς ως εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-x} \cdot dx &= \int \frac{-1}{x} \cdot dx + \int \frac{1/2}{x-1} \cdot dx + \int \frac{1/2}{x+1} \cdot dx = \\ &= -1 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx = \\ &= -1 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(x-1)'}{x-1} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(x+1)'}{x+1} \cdot dx = \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| + \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| + C,\end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$