Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \ x\le 2\\ \kappa x+5 & , \ x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2. Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12 & , \ x<1\\ 5 & , \ x=1\\ \alpha x+\beta & , \ x>1\end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

3. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει

$$x f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1.$$

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|xg(x)-\eta\mu x|\le x^2.$$

4. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0)<g(0)$ και $f(1)>g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$.

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

7. **i)** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1,1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

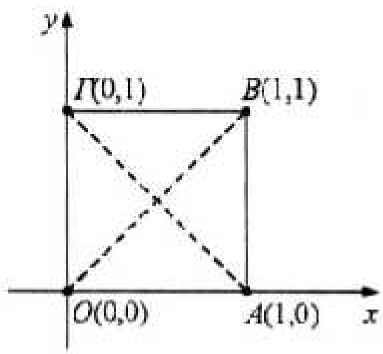
β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

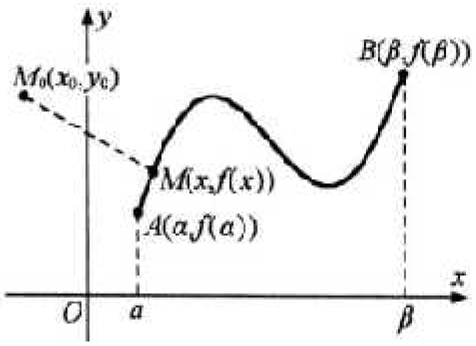
8. Δίνεται το τετράγωνο $OAB\Gamma$ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

9. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,



i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.