<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες όχι;

1. Για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύει ότι $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}\,.\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\,\vec{\gamma}$.

2. Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

3. Αν $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \neq \frac{\pi}{2}$

4. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα.

5. Αν $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,.\,\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

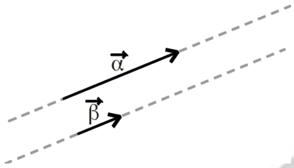
6. Υπάρχουν x ∈ R τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση από τις προτεινόμενες σε κάθε περίπτωση

1. Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k}\cdot\vec{v} = -3$ και $0 \le \vec{\theta} = (\widehat{\vec{k},\ \vec{v}}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με

Α. 0° **Β.** 30° **Γ.** 60° **Δ.** 120° **Ε.** 150°

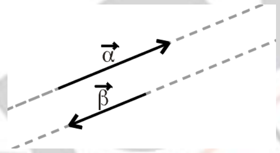
2. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ισούται με



Α. $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Β.** $-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Γ.** 0

Δ. $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

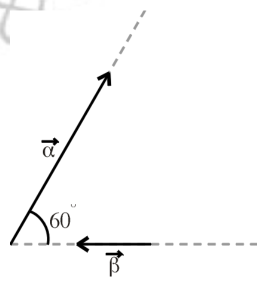
3. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ισούται με



Α. **Β.** $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Γ.** $-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

4. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ισούται με



Α. $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Β.** $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Δ. $-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Πηγή: ΚΕΕ

Γκιμίσης Βασίλης

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

3. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 75°$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 135°$

4. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

5. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να δειχθεί ότι αν ισχύει η σχέση:

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)$$

τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος αυτού. Να δειχθεί ότι:

α: $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ β: $\overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

7. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

8. Θεωρούμε τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$. Αν $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{i}$, όπου $|\vec{i}| = 1$, τότε δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μικρότερο $|\vec{\beta}|$.

Γκιμίσης Βασίλης