Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0\,.$$

Πότε ισχύει το "="?

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$ (iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

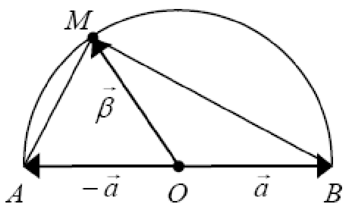
(ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\mu,\nu)$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να δείξετε ότι $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$.

6. Να αποδείξετε ότι $-1\leq\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\leq 1$.

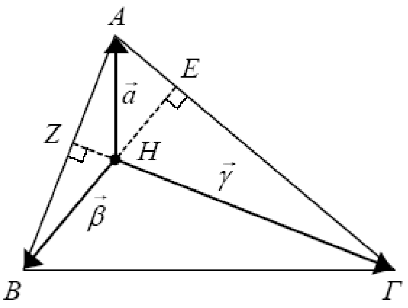
7. Σε ημικύκλιο με διάμετρο AB και κέντρου O παίρνουμε σημείο M.



(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα δύο ύψη του BE και ΓZ τέμνονται στο H. Έστω $\overrightarrow{HA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{HB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{H\Gamma}=\vec{\gamma}$.



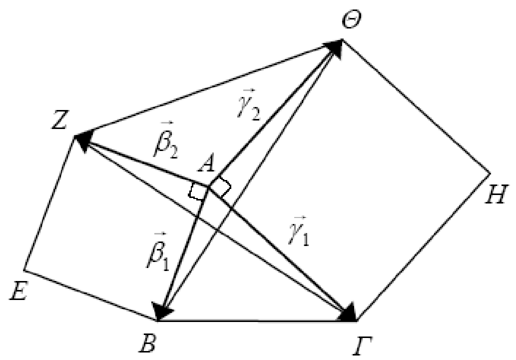
(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

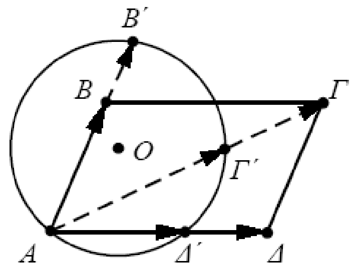
(iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH \perp B\Gamma$. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma H\Theta$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα $B\Theta$ και ΓZ;



10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και κύκλος κέντρου O που διέρχεται από την κορυφή A και τέμνει τις ευθείες $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ στα B', Γ' και Δ' αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$.



11. Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο M του επιπέδου του. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το M τέμνει τον κύκλο στα A και B, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό. (Το γινόμενο αυτό λέγεται *δύναμη του σημείου M ως προς τον κύκλο O*).