

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2$	β) $(y + 5)^2$	γ) $(2\omega + 1)^2$	δ) $(\kappa + 2\lambda)^2$
ε) $(3y + 2\beta)^2$	στ) $(x^2 + 1)^2$	ζ) $(y^2 + y)^2$	η) $(2x^2 + 3x)^2$
θ) $(x + \sqrt{2})^2$	ι) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$	ια) $(a + \frac{1}{2})^2$	ιβ) $(\omega + \frac{4}{\omega})^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 3)^2$	β) $(y - 5)^2$	γ) $(3\omega - 1)^2$	δ) $(2\kappa - \lambda)^2$
ε) $(3y - 2\beta)^2$	στ) $(x^2 - 2)^2$	ζ) $(y^2 - y)^2$	η) $(2x^2 - 5x)^2$
θ) $(x - \sqrt{3})^2$	ι) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$	ια) $(a - \frac{3}{2})^2$	ιβ) $(\omega - \frac{2}{\omega})^2$

3 Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(\sqrt{3} + 1)^2$	β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$	γ) $(\sqrt{2} - 3)^2$	δ) $(1 - \sqrt{7})^2$
-----------------------	------------------------------	-----------------------	-----------------------

4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x \cdots \dots)^2 = \dots + \dots + 9$	β) $(\dots \cdots 4)^2 = y^2 - \dots \cdots \dots$
γ) $(\dots - \dots)^2 = 16x^2 \cdots 8x\alpha \cdots \dots$	δ) $(\dots \cdots 2\omega)^2 = \dots - 4x^2\omega \cdots \dots$

5 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 1)^3$	β) $(y + 4)^3$	γ) $(2a + 1)^3$	δ) $(3a + 2\beta)^3$
ε) $(x^2 + 3)^3$	στ) $(y^2 + y)^3$	ζ) $(x - 2)^3$	η) $(y - 5)^3$
θ) $(3a - 1)^3$	ι) $(2x - 3y)^3$	ια) $(y^2 - 2)^3$	ιβ) $(\omega^2 - 2\omega)^3$

6 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 1)(x + 1)$	β) $(y - 2)(y + 2)$	γ) $(3 - \omega)(3 + \omega)$
δ) $(x + 4)(4 - x)$	ε) $(x - y)(-x - y)$	στ) $(-x + y)(-x - y)$
ζ) $(2x + 7y)(2x - 7y)$	η) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$	θ) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

7 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1)$ είναι σταθερό.

8 α) Να αποδείξετε ότι $(a - \beta)(a + \beta)(a^2 + \beta^2)(a^4 + \beta^4) = a^8 - \beta^8$.

β) Να υπολογίσετε το γινόμενο: $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$.

9 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{1}{\sqrt{5} - 1}$	β) $\frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$	γ) $\frac{5}{3 + \sqrt{2}}$	δ) $\frac{12}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$
-----------------------------	------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------

10 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

γ) $(2\omega + 1)(4\omega^2 - 2\omega + 1)$

δ) $(1 - a)(1 + a + a^2)$

11 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x - 4)^2 + (2x + 5)^2$

β) $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

γ) $(x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) + (2x - y)^2$

δ) $(3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 - 2(3x - 4)(3x + 4)$

ε) $(2\alpha + 1)^3 + (2\alpha - 1)^3$

στ) $(\alpha + 2)^3 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$

ζ) $(\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3$

η) $(4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1)$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β) $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$

γ) $(x - 1)(x + 1)^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = x^4 - 1$

δ) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

ε) $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2$

στ) $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$

13 Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy

β) $x^2 - y^2$

γ) $x^2 + y^2$

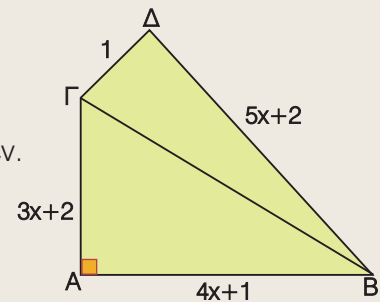
δ) $x^3 + y^3$

14 α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x = \left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2$

15 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

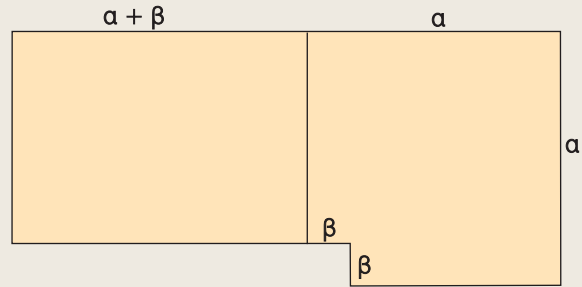
- 16
- Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν.
 - Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.
 - Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.
 - Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.
 - Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.
 - Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε;



17 α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

18 Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο παιδιά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο από τα παιδιά αδικήθηκε;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



*Το τρίγωνο του Πασκάλ
 και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του $a + β$*

1		$(a + β)^0 =$	1
1	1	$(a + β)^1 =$	$1a + 1β$
1	2	$(a + β)^2 =$	$1a^2 + 2aβ + 1β^2$
1	3	$(a + β)^3 =$	$1a^3 + 3a^2β + 3aβ^2 + 1β^3$
1	4	$(a + β)^4 =$	$1a^4 + 4a^3β + 6a^2β^2 + 4aβ^3 + 1β^4$
1	□	$(a + β)^5 =$ + + + + +
1	□	$(a + β)^6 =$

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος $a + β$.

1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Πασκάλ**. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.
 Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;



2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(a + β)^5$ και $(a + β)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του a και του $β$ σε κάθε ανάπτυγμα.
3. Να βρείτε και το ανάπτυγμα του $(a - β)^6$, αν γνωρίζετε ότι και τα αναπτύγματα των δυνάμεων της διαφοράς $a - β$ προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +.
 π.χ. $(a - β)^2 = a^2 - 2aβ + β^2$, $(a - β)^3 = a^3 - 3a^2β + 3aβ^2 - β^3$

4. Μπορείτε να βρείτε ποιες άλλες ιδιότητες κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου Πασκάλ;