

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο**1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες (2)****Κατανόησης - σχετικά εύκολες**

1. Στις επόμενες ερωτήσεις μία ακριβώς από τις πιθανές απαντήσεις που δίνονται είναι αληθής. Να σημειώσετε ένα «X» στο Τετραγωνίδιο που αντιστοιχεί η σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις:

1. Το ανάπτυγμα του $(x-4)^2$ είναι:

☐ $x^2 - 4x + 4$

☐ $x^2 - 8x + 8$

☐ $x^2 - 8x + 16$

☐ $x^2 - 16x + 16$

Απάντηση

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \text{ σύμφωνα με το ανάπτυγμα } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Το ανάπτυγμα του $(x+4)^3$ είναι:

☐ $x^3 + 64$

☐ $x^3 + 12x + 48x^2 + 64$

☐ $x^3 + 12x + 24x^2 + 64$

☐ $x^3 + 48x + 12x^2 + 64$

Απάντηση

$$(x+4)^3 = x^3 + 48x + 12x^2 + 64$$

$$\text{σύμφωνα με το ανάπτυγμα } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3. Το $x^3 - 64$ γίνεται γινόμενο ως εξής:

☐ $(x-4)(x^2 + 4^2)$

☐ $(x^2 - 4^2)(x+4)$

☐ $(x-4)(x^2 + 4x + 16)$

☐ $(x-4)(x^2 - 4x + 16)$

Απάντηση

$$x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

2. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες.

α) $(4x-1)(16x^2+4x+1)$

β) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

γ) $(t+2y)(t^2-2ty+4y^2)$

Λύση

α) $(4x-1)(16x^2+4x+1) = (4x)^3 - 1^3 = 64x^3 - 1$

σύμφωνα με την ταυτότητα $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

β) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2) = (3x)^3 - (4y)^3 = 27x^3 - 64y^3$

γ) $(t+2y)(t^2-2ty+4y^2) = t^3 + (2y)^3 = t^3 + 8y^3$

3. Να κάνετε τις πράξεις.

I) $(2\theta+1)^3 + (2\theta-1)^2$

II) $(\mu^2+\mu)^3 - (\mu^2-\mu)^3$

III) $((x+2y)(x-2y))^2$

Λύση

I) $(2\theta+1)^3 + (2\theta-1)^2 = (2\theta)^3 + 3(2\theta)^2 + 3(2\theta) + 1^3$

$= 8\theta^3 + 12\theta^2 + 6\theta + 1$

II) $(\mu^2+\mu)^3 - (\mu^2-\mu)^3$

$= (\mu^2)^3 + 3(\mu^2)^2\mu + 3\mu^2\mu^2 + \mu^3 - (\mu^2)^3 + 3(\mu^2)^2\mu - 3\mu^2\mu^2 + \mu^3 =$

$= \cancel{(\mu^2)^3} + 3(\mu^2)^2\mu + 3\mu^2\mu^2 + \mu^3 - \cancel{(\mu^2)^3} + 3(\mu^2)^2\mu - 3\mu^2\mu^2 + \mu^3 =$

$= 6\mu^5 + 2\mu^3$

III) $((x+2y)(x-2y))^2 = ((x)^2 - (2y)^2)^2 = (x^2 - 4y^2)^2 = x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

4. Να αποδείξετε ότι:

- α. $(a - \beta)(a + \beta) - (2a - \beta)(2a + \beta) + 3\alpha^2 = 0$
- β. $\alpha(1 + \alpha)(a - 1) - (a - 1)^2 - \alpha^3 = -1 - \alpha(\alpha - 1)$
- γ. $(2a^2 - 1)^3 - 2(2a^3 - 1)(1 + 2a^3) - 1 = -6\alpha^2(2a^2 - 1)$

Λύση

α. Για την απόδειξη μιας ισότητας μπορούμε να δουλέψουμε στο πρώτο μέλος και να καταλήξουμε στο δεύτερο

$$(a - \beta)(a + \beta) - (2a - \beta)(2a + \beta) + 3\alpha^2 =$$

$$a^2 - \beta^2 - ((2a)^2 - \beta^2) + 3\alpha^2 = a^2 - \beta^2 - 4a^2 + \beta^2 + 3\alpha^2 = 0$$

β. Για την απόδειξη μιας ισότητας μπορούμε να δουλέψουμε στα δύο μέλη ξεχωριστά και αν καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα σημαίνει ότι οι αρχικές ποσότητες είναι ίσες

$$\alpha(1 + \alpha)(a - 1) - (a - 1)^2 - \alpha^3 =$$

$$\alpha(a^2 - 1) - (a^2 - 2\alpha + 1) - \alpha^3 = \alpha^3 - \alpha - a^2 + 2\alpha - 1 - \alpha^3 = -a^2 + \alpha - 1$$

και $-1 - \alpha(\alpha - 1) = -1 - \alpha^2 + \alpha$

γ. Δουλεύουμε με τη μέθοδο που αναπτύξαμε στο β. ερώτημα

$$(2a^2 - 1)^3 - 2(2a^3 - 1)(1 + 2a^3) - 1 =$$

$$(2a^2)^3 - 3(2a^2)^2 + 3 \cdot 2a^2 - 1 - 2((2a^3)^2 - 1) - 1$$

$$= 8\alpha^6 - 12\alpha^4 + 6\alpha^2 - 1 - 2(4\alpha^6 - 1) - 1$$

$$= 8\alpha^6 - 12\alpha^4 + 6\alpha^2 - 1 - 8\alpha^6 + 2 - 1 = -12\alpha^4 + 6\alpha^2$$

και $-6\alpha^2(2a^2 - 1) = -12\alpha^4 + 6\alpha^2$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

5. α) Να αποδείξετε ότι $\left(x + \frac{5}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{x}\right)^2 = 20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $a = \left(123 + \frac{5}{123}\right)^2 - \left(123 - \frac{5}{123}\right)^2$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \left(x + \frac{5}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{x}\right)^2 = \left(x^2 + 2x \frac{5}{x} + \frac{25}{x^2}\right) - \left(x^2 - 2x \frac{5}{x} + \frac{25}{x^2}\right) \\ & = x^2 + 2 \cdot 5 + \frac{25}{x^2} - x^2 + 2 \cdot 5 - \frac{25}{x^2} = 20 \end{aligned}$$

β) Σύμφωνα με το α) για $x = 123$, $a = \left(123 + \frac{5}{123}\right)^2 - \left(123 - \frac{5}{123}\right)^2 = 20$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

β) Αν $a - \frac{1}{a} = 5$ να βρείτε το αριθμό $A = a^3 - \frac{1}{a^3}$

Λύση

Για την απόδειξη μιας ισότητας μπορούμε να δουλέψουμε στο δεύτερο μέλος και να καταλήξουμε στο πρώτο

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) &= a^3 - 3a^2 \frac{1}{a} + 3a \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + 3a - 3\frac{1}{a} = \\ &= a^3 - 3a + 3\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} + 3a - 3\frac{1}{a} = a^3 - \frac{1}{a^3} \end{aligned}$$

β) Αν $a - \frac{1}{a} = 5$ επειδή $A = a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$ θα έχουμε

$$A = 5^3 + 3 \cdot 5 = 125 + 15 = 140$$

7. Αν $x + \frac{2}{x} = 6$ να υπολογίσετε την παράσταση $x^2 + \frac{4}{x^2}$.

Λύση

Αν $x + \frac{2}{x} = 6$ τότε $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 6^2$ άρα

$$x^2 + 2x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 36 \Leftrightarrow x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} = 36 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 32$$

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!



ARNOS
Online Education

...Πράξεις Παιδείας!