

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο**1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες****Κατανόησης - σχετικά εύκολες**

1. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες όχι;

α) Η παράσταση $3x = 3x$ είναι ταυτότητα Σ Λ

β) $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 18x + 25$ Σ Λ

γ) $(x + 5)^3 = x^3 + 125$ Σ Λ

δ) Ισχύει ότι $(-x - 2)(-x - 2) = x^2 - 4$ Σ Λ

ε) Η ισότητα $x + y = 0$ είναι ταυτότητα. Σ Λ

Λύση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της

α) Σωστό, η παράσταση $3x = 3x$ είναι ταυτότητα γιατί αληθεύει για κάθε x

β) Λάθος $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$ σύμφωνα με το ανάπτυγμα

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

γ) Λάθος $(x + 5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ σύμφωνα με το ανάπτυγμα

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

δ) Λάθος $(-x - 2)(-x - 2) = (-x - 2)^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4$

ε) Λάθος Η ισότητα $x + y = 0$ ισχύει μόνο αν $x = -y$.

2. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες.

α) $(x - y)^2 =$

β) $(3x - 4y)^2 =$

γ) $(4t + 2y^5)^2 =$

δ) $(3x + 2y)^2 =$

Λύση

α) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

β) $(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

γ) $(4t + 2y^5)^2 = 16t^2 + 16ty^5 + 4y^{10}$

δ) $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

3. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες.

α) $(x - y)(x + y) =$

β) $(3x - 2y)(3x + 2y)$

γ) $(x - y)(-x - y) =$

Λύση

α) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

β) $(3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 =$

γ) $(x - y)(-x - y) =$

4. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες.

α) $(x - y)^3 =$

β) $(a + 2b)^3 =$

γ) $(3x - y^2)^3 =$

δ) $(2a - b)^3 =$

ε) $(x + 2y^2)^3 =$

στ) $(x^2 + 4y^3)^2 =$

Λύση

α) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

β) $(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

γ) $(3x - y^2)^3 = 27x^3 - 27x^2y^2 + 9xy^4 - y^6$

δ) $(2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

ε) $(x + 2y^2)^3 = x^3 + 6x^2y^2 + 12xy^4 + 8y^6$

στ) $(x^2 + 4y^3)^2 = x^4 + 8x^2y^3 + 16y^6$

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

5. Να αναπτύξετε τις ταυτότητες.

$$\alpha) \left(5a - \frac{2}{3}y\right)^2 =$$

$$\beta) \left(3a^3 + \frac{1}{2}y\right)^2 =$$

$$\gamma) (-2a - 1)^3 =$$

$$\delta) \left(3a^3 + \frac{1}{2}y\right)\left(3a^3 - \frac{1}{2}y\right) =$$

Λύση

$$\alpha) \left(5a - \frac{2}{3}y\right)^2 = 25a^2 - \frac{20}{3}ay + \frac{4}{9}y^2$$

$$\beta) \left(3a^3 + \frac{1}{2}y\right)^2 = 9a^6 + 3a^3y + \frac{1}{4}y^2$$

$$\gamma) (-2a - 1)^3 = -(2a + 1)^3 = -(8a^3 + 12a^2 + 6a + 1) \\ = -8a^3 - 12a^2 - 6a - 1$$

$$\epsilon) \left(3a^3 + \frac{1}{2}y\right)\left(3a^3 - \frac{1}{2}y\right) = (3a^3)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 9a^6 - \frac{1}{4}y^2$$

6. Αν $x = 2 + \sqrt{3}$ και $y = 2 - \sqrt{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) xy \quad \beta) x^2 - y^2 \quad \gamma) x^2 + y^2 \quad \delta) x^3 + y^3$$

Λύση

$$\alpha) xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\beta) x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = [(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})][(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})] =$$

$$(2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$$

$$\gamma) x^2 + y^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 14$$

$$\delta) x^3 + y^3 = (2 + \sqrt{3})^3 + (2 - \sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^3 + 8 - 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}^2 - \sqrt{3}^3 =$$

$$8 + 6 \cdot 3 + 8 + 6 \cdot 3 = 52$$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

7. α) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 3x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 12$

Λύση

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - \frac{x^2 - 6x + 9}{4} =$$

$$\frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9}{4} = \frac{12x}{4} = 3x$$

β) Δεδομένου ότι $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 3x$

η εξίσωση $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 12$

γίνεται $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

8. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

β) Αν $x - \frac{1}{x} = 8$ να βρείτε το αριθμό $K = x^3 - \frac{1}{x^3}$

Λύση

α) Μπορούμε να ξεκινήσουμε από το 2^ο μέλος

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) &= x^3 - 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3x - 3\frac{1}{x} \\ &= x^3 - 3x + 3\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + 3x - 3\frac{1}{x} = x^3 - \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

β) Δεδομένου ότι $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Αν $x - \frac{1}{x} = 8$

$$K = x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 8^3 + 3 \cdot 8 = 512 + 24 = 536$$

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!



ARNOS
Online Education

...Πράξεις Παιδείας!